Angèle Kremer Marietti

Théorie des modèles

Dans son livre sur la théorie physique, Pierre Duhem[1] examinait les questions de l'explication, de la classification, et de l'histoire des sciences, ainsi que celle des modèles mécaniques. Il évaluait l'usage des modèles mécaniques du point de vue de leur fécondité (ch. IV). Ainsi, le modèle était considéré par Duhem comme un élément typiquement anglais. Pour lui, le physicien français ou allemand, Poisson[2] ou Gauss[3], est en présence d'abstractions: un point matériel, une charge électrique, la force à laquelle est soumis le point matériel. En ce sens, la théorie de l'Électrostatique est un ensemble de notions abstraites et de propositions générales. Au contraire, en ce qui le concerne, le physicien anglais va se créer un modèle pour se représenter mentalement les phénomènes qui se déroulent réellement. Faraday va construire le modèle des actions électrostatiques, qui sera admiré par Maxwell et par toute l'école anglaise.

Ce qui semblait, à l'époque de Duhem, réservé à l'école physique anglaise s'est généralisé chez tous les chercheurs. Mais le terme de 'modèle' peut désigner des réalités différentes selon le niveau d'abstraction adopté. Aujourd'hui, la définition du modèle peut être la suivante :

« Représentation simplifiée, souvent mathématisée, de relations ou de fonctions unissant les unités d'un système. De type descriptif, expositif ou inductif, le modèle se présente comme un système d'interactions reliant les éléments d'un ensemble. Il simule la réalité, ou tout au moins les aspects de la réalité correspondant à la pertinence du point de vue adopté. La construction de modèles est désormais devenue le credo de l'ensemble des disciplines scientifiques. Leur construction ou leur réfutation.» (P. Parlebas, 'Modèle', in *Encyclopédie Philosophique Universelle,* tome 2, p. 1646)

---

[1] *La Théorie physique Son Objet. Sa Structure.* 1ère éd. 1906, 2è éd. revue et augmentée, Paris, Marcel Rivière, 1914.
[2] S.D. Poisson (1781-1840).
[3] C.F. Gauss (1777-1855).

Mais il y a d'autres définitions possibles selon que l'on considère le modèle comme la relation entre les énoncés d'un langage formel et les interprétations ou structures qui rendent ces énoncés vrais ou faux ; ou selon que l'on considère le modèle comme la branche des mathématiques concernant les modalités de classement des structures mathématiques.

Le modèle a une valeur représentative. Le problème épistémologique concernant le modèle est celui de sa validité et de ses capacités de généralisation dans le rapport au principe de l'isomorphisme relatif aux situations et aux formes. Il en ressort que « deux situations seront placées dans une même classe d'équivalence, et donc réputées de la même catégorie, si l'on montre qu'elles possèdent la même structure » (*op. cit.* 1648). Un cas marqué d'isomorphisme entraîne un pouvoir d'interprétation certain. Un modèle de l'arithmétique de Peano est une structure dans laquelle tous les axiomes de Peano sont vérifiés.

Ainsi, dans le domaine de la logique modale (qui est l'étude des notions de nécessité et de possibilité inaugurée par Aristote dans *De l'Interprétation* et les *Premiers Analytiques*), Quine (1951) a-t-il développé (voir « Two Dogmas of Empiricism ») une théorie de la validité en rapport avec une théorie du modèle, selon laquelle la validité est la propriété de règles qui préservent la vérité. Et cela, pour toutes les interprétations des symboles non logiques (tels que : un descripteur, diverses espèces de quantificateurs) dans les phrases connectées par les règles d'inférence. Ce qui inclut certaines vérités logiques telles que : « tous les célibataires sont des célibataires », mais exclut « tous les célibataires sont des gens non mariés ».

Après que Ruth Barcan Marcus eut fondé la logique modale quantifiée combinant les modalités *de re* et *de dicto*[4], T. Parsons[5] a montré que la logique modale admet un 'modèle maximal' c'est-à-dire un modèle qui contient pour tout ensemble consistant d'énoncés non-modaux un monde dans lequel ils sont vrais, c'est-à-dire un monde dans lequel les faits de ce monde tiennent, mais dans lequel aucun énoncé n'est vrai.

Si l'emploi du terme 'modèle' en ce sens ne date que de 1940, l'idée existait auparavant ; par exemple dans le théorème de complétude de Gödel (1930)[6]: Si on ne peut déduire de contradiction d'un ensemble de formules, alors cet ensemble a un modèle ; ou dans le théorème de compacité de Gödel (1930) : Si

[4] Cf. Ruth Barcan Marcus, "A Functional Calculus of first Order based on Strict Implication", in *The Journal of Symbolic Logic*, 1946.
[5] Cf. T. Parsons, "Essentialism and Quantified Modal Logic" (1969) in Linsky, *Reference and Modality*, Oxford Readings in Philosophy (1971).
[6] K. Gödel (1906-1978).

tout sous-ensemble fini d'un ensemble T de formules a un modèle, alors T lui-même a un modèle.

De plus, en 1954, Tarski, définit la théorie des modèles comme une partie de la sémantique des théories formalisées, étudiant les relations mutuelles entre les propositions du calcul logique et les systèmes mathématiques dans lesquels ces propositions sont satisfaites. D'où la rupture avec l'exigence de domination des contenus par le formalisme, des théories mathématiques par leur syntaxe, et de l'activité inventive par l'activité démonstrative. Il s'agit maintenant d'interactions constitutives qui permettent d'élaborer des concepts nouveaux, tant du côté de la syntaxe que du côté de la sémantique.

Aussi, en 1968, Peter Achinstein[7] a-t-il distingué quatre sortes de modèles :

le modèle représentationnel représentant un prototype pour effectuer des expériences ou des calculs ;
le modèle analogique ne reproduisant pas les propriétés du prototype mais se situant dans une relation analogique avec lui ;
le modèle théorique : une supposition au sujet d'un modèle visé, il attribue à X une structure interne ou un mécanisme rendant compte de certaines de ses propriétés manifestes ;
le modèle imaginaire décrivant un système X à l'aide de suppositions sans admettre leur vérité : point de départ de recherches originales ; exemple : le champ électromagnétique purement mécanique proposé par Maxwell.

Si le modèle M d'une théorie T peut se révéler un instrument remarquable, il peut aussi représenter un piège potentiel. Selon Ernst Nagel (1961)[8] : soit on risque de prendre pour un élément indispensable de la théorie T une caractéristique non essentielle du modèle M ; soit on risque de voir que les succès explicatifs et prédictifs de T conduisent les chercheurs à croire en la réalité des éléments du modèle M de la théorie T : par exemple, l'éther pour le modèle de la théorie électromagnétique de la matière au XIXè siècle.

Puisque la physique s'est révélée être une physique mathématique, Pierre Duhem[9] s'est posé la juste question : « à quelle condition une propriété physique peut-elle être signifiée par un symbole numérique ? ». Aristote avait donné la réponse : cette propriété doit appartenir à la catégorie de la quantité et

[7] P. Achinstein, *Concepts of Science. A Philosophical Analysis*, Baltimore, Johns Hopkins Press, 1968.
[8] E. Nagel, *The Structure of Science. Problems in the Logic of Scientific Explanation*, New York, Hartcourt, Brace & World, Inc., 1961.
[9] Cf. P. Duhem, *La Théorie physique. Son objet. Sa structure*, op. cit.

non à celle de la qualité. D’où l’apport essentiel de la mesure dans toute théorie physique[10].

En 1955, Abraham Robinson[11] définit la notion de "modèle-complétude" pour prouver la complétude de certaines théories sans devoir prouver d'abord que ces théories admettent l'élimination des quantificateurs : rappelons que, dans la logique des prédicats, les quantificateurs sont des opérateurs unaires au nom d'une variable individuelle[12]. Robinson voulait fournir une alternative à la méthode élaborée par Tarski, pour démontrer la complétude et la décidabilité de la théorie élémentaire du corps ordonné des nombres réels et de la géométrie euclidienne du plan ou de la théorie des corps réels clos et de la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Donc, le concept de modèle-complétude est lié à des propriétés spécifiques de deux théories mathématiques jumelles : dues à E. Steinitz (1910) et à E. Artin et O.Schreier[13]. La définition des deux critères de Robinson repose sur une notion fondamentale en théorie des modèles, la notion de diagramme qui met en jeu la notion d'addition des constantes.

Définition du diagramme d'un modèle : on appelle diagramme du modèle M l'ensemble des énoncés atomiques de Lm satisfaits et des énoncés atomiques de Lm non satisfaits dans M. Une théorie T est dite modèle-complète si, pour tout modèle M de T, la théorie T' obtenue par réunion de T et du diagramme de M est complète. Suivent les critères I et II de modèle-complétude, ainsi que la deuxième et la troisième définition.

Il existe des théories complètes mais non modèle-complètes : par exemple, la théorie des ensembles totalement ordonnés, denses, avec premier et dernier éléments.
Il existe des théories modèle-complètes non complètes : par exemple, la théorie des corps algébriquement clos (à ne pas confondre avec la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée qui, elle, est complète et modèle-complète).

[10] A. Kremer–Marietti, "Measurement and Principles : The Structure of Physical Theories", in Revue Internationale de Philosophie: Pierre Duhem. N°182, Bruxelles, 3 / 1992.
[11] Cf. Abraham Robinson, "Ordered structures and related concepts", in *Mathematical Interpretation of Formal Systems*, North Holland, 1955.
[12] Il existe deux sortes de quantificateurs : les quantificateurs universels et les quantificateurs particuliers.
[13] O.Schreier (1924-1926).

Références

- Pierre DUHEM, *La Théorie physique. Son Objet. Sa Structure*, 1ère éd. 1905, 2è éd. revue et augmentée, Paris, Marcel Rivière, 1914.
- Vladimir PROPP, *Morphologie du conte,* Paris, Le Seuil, 1970.
- Claude LÉVI-STRAUSS, *Anthropologie structurale* II, Paris, Plon, 1973.
- Paul GOCHET, *Quine en perspective*, Flammarion, 1978.
- Paul GOCHET, *Ascent to Truth*. A Critical Examination of Quines Philosophy, München, Philosophia Verlag München Wien, 1986.
- D. LASCAR, "Théorie des modèles", *Encyclopédie Philosophique Universelle*, tome 2,1990, p.1653[14].
- Houria BENIS-SINACEUR, "Modèle-complétude", *Encyclopédie Philosophique Universelle*, tome 2, p.1651-52.
- P. PARLEBAS, « Modèle », *Encyclopédie Philosophique Universelle,* tome 2, p.1646-1649.

[14] Rappelons la définition : « on appelle modèle d'un ensemble de formules une structure satisfaisant ces formules. »