DOGMA
REVUE DE PHILOSOPHIE ET DE SCIENCES HUMAINES

La logique pas si « scandaleuse » des incommensurables

Benoît RITTAUD
université Paris-13, Sorbonne-Paris-Cité
LAGA, CNRS, UMR 7539
99 avenue Jean-Baptiste Clément
F-93430 Villetaneuse, France
rittaud@math.univ-paris.13.fr

En 1887, l'historien des mathématiques Paul Tannery a lancé une expression devenue célèbre, celle du « scandale logique[1] » qu'aurait constitué la découverte, en Grèce ancienne, des *grandeurs incommensurables*. Celles-ci correspondent à ce que nous appelons les *nombres irrationnels*.

Un nombre est dit rationnel lorsqu'il peut s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers. Ainsi, 8/3, ou 19/11 ou encore 1/10000 sont des rationnels. Les entiers eux-mêmes sont tous des rationnels[2]. Les nombres décimaux, c'est-à-dire ceux qui n'ont qu'une quantité finie de chiffres après la virgule, le sont aussi[3]. L'exemple de 1/3 (=0,3333…) montre que la réciproque n'st pas vraie : il existe des rationnels qui ne sont pas des décimaux.

Par définition, un nombre est *irrationnel* lorsqu'il n'est pas rationnel. Comme on le sait depuis le XVIII^e^ siècle, le nombre π, rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, est un exemple d'irrationnel.

Dans le vocabulaire grec, le concept de nombre rationnel se dit au travers de celui des grandeurs *commensurables*. Deux segments sont commensurables dès lors qu'il est possible de trouver un troisième segment qui les mesure tous les deux, c'est-à-dire une unité de mesure telle que le premier segment soit de m unités et le second de n unités (m et n étant deux entiers). Il est clair que, dans ce cas, le rapport des longueurs des segments est de m/n, d'où le lien avec les nombres rationnels.

Deux grandeurs sont incommensurables, en revanche, si une telle unité de mesure commune n'existe pas. Dans cette terminologie, « π est irrationnel » se dit : « la circonférence d'un cercle est incommensurable à son diamètre ».

---

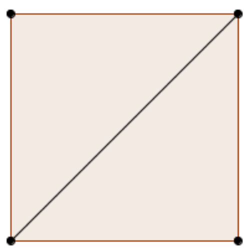
1 *La Géométrie grecque*, volume 1, Paris, Gauthier-Villars, 1887, page 98.
2 Par exemple, un nombre comme 17 peut s'écrire comme le quotient 17/1.
3 En effet, un décimal est par définition une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. On a ainsi, par exemple, que 2,76 est égal à 276/100.

Les premiers penseurs du nombre en tant que concept abstrait ont peut-être été les pythagoriciens[4], aux VIe-Ve siècles avant notre ère. Il semble, même si la prudence est de mise sur cette période de l'histoire de la pensée sur laquelle nous n'avons que des renseignements aussi fragmentaires que tardifs (et bien souvent sujets à caution), que les pythagoriciens aient considéré que « tout est nombre », au sens ancien du mot, c'est-à-dire que tout est nombre *entier* et rapports entre entiers. En langage moderne, cela revient à supposer que toutes les grandeurs possibles sont commensurables, et que leur trouver une unité de mesure commune n'est qu'une question d'efforts nourris de considérations arithmétiques ou géométriques.

Les pythagoriciens ont finalement découvert qu'il existait des grandeurs incommensurables, allant ainsi à l'encontre de leur propre système de pensée (lequel leur a notamment permis de réaliser la première gamme musicale fondée sur une théorie mathématisée, et dont toute la tradition musicale occidentale est l'héritière directe). Tel est, en substance, l'origine de l'idée de Tannery d'un « scandale logique » : une découverte mathématique invalidant un point majeur de la doctrine pythagoricienne, dont il faut rappeler qu'elle était autant d'inspiration mystique que scientifique, si ce n'est plus.

La dimension poétique d'une découverte mathématique secouant une école de pensée tel un tremblement de terre a sans doute joué dans la perpétuation du « scandale logique » imaginé par Tannery, même si cet éventuel scandale a quelque peu perdu de son pouvoir de séduction chez les spécialistes. Il n'en demeure pas moins très probable que l'existence des grandeurs incommensurables a été une découverte importante, peut-être même fondatrice de la pensée mathématique moderne. En effet, s'assurer de l'incommensurabilité de deux grandeurs requiert un authentique raisonnement, là où tant d'autres résultats de mathématiques élémentaires (par exemple le fait que les diagonales d'un carré sont toujours de même longueur) ont un caractère d'évidence qui rend moins décisive cette part essentielle et quasi-définitoire des mathématiques en tant que telle : la démonstration.

A minima, la découverte des grandeurs incommensurables a très probablement été à l'origine de la réorientation de la manière grecque de faire des mathématiques, notamment en favorisant l'essor de la géométrie aux dépens (partiels) de l'arithmétique. Les exemples historiques attestés de grandeurs incommensurables proviennent en effet de situations géométriques telles que celle d'un carré et de sa diagonale.

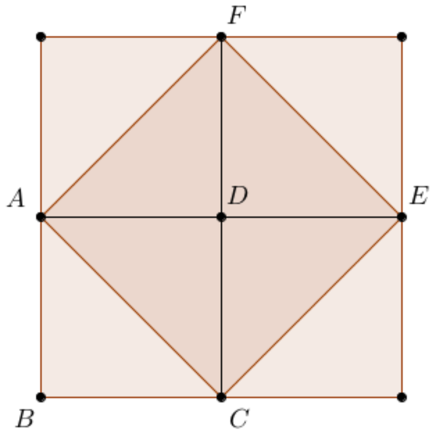


[4] Jean-François Mattéi, *Pytagore et les Pythagoriciens*, Paris, Presses Universitaires de France, 1996.

En langage moderne, on dit que la diagonale du carré est √2 fois plus grande que son côté. La plus ancienne démonstration connue de ce résultat est celle du *Ménon* de Platon *(voir encadré)*.

La diagonale du carré

Soit un carré *ABCD* dont, pour fixer les idées, le côté est de mesure 1. Nous voulons montrer que la diagonale *AC* est de longueur √2. Pour cela, complétons la figure comme ci-dessous.



Le carré *ABCD* est de côté 1, donc d'aire $1^2 = 1$, tout comme les trois autres carrés qui lui sont identiques (disposés au-dessus et à sa droite). Ces quatre carrés pris ensemble forment donc un carré d'aire 4. L'aire du carré oblique *BDEF* tracé sur les diagonales est la moitié de celle de ce grand carré, car ce carré *BDEF* contient la moitié de chaque petit carré. Ainsi, l'aire de *BDEF* est égale à 2. Puisque le côté d'un carré est la racine carrée de son aire, la longueur *BD* est égale à √2.

Le caractère irrationnel de √2 (ou, si l'on veut, l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré) marque en un sens la supériorité de la géométrie sur l'arithmétique, dans la mesure où la figure d'un carré et de sa diagonale met en scène deux grandeurs dont le rapport échappe à l'arithmétique, royaume des nombres entiers. C'est au point que les anciens Grecs, au moins dans les textes qui nous sont parvenus, ne considèrent jamais de nombre correspondant à ce que nous appelons √2. Ce qui nous apparaît comme une *propriété d'un nombre* (√2 est irrationnelle) est, pour eux, l'*expression d'un phénomène* (nul segment ne mesure à le fois le côté et la diagonale d'un carré).

On ignore aujourd'hui de quelle manière les pythagoriciens se sont persuadés de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré. Il n'y a même pas de certitude absolue sur le fait que ce soient bien ces deux grandeurs qui auraient été les premières identifiées comme incommensurables.

Il existe beaucoup de démonstrations possibles[5]. La suite de cet article s'intéresse à trois d'entre elles, toutes potentiellement accessibles aux pythagoriciens (fût-ce sous une écriture différente) et à leur caractère plus ou moins « scandaleux ». La première, la plus connue et peut-être la plus ancienne, est incontournable malgré son caractère peu évident. La seconde, beaucoup plus simple, permet d'illustrer les profondes différences de perspectives qui apparaissent même en s'en tenant à un point de vue arithmétique. La troisième enfin, d'une rare élégance, a été depuis un demi-siècle proposée comme ayant été historiquement première, bien qu'elle soit en un sens la moins scandaleuse des trois.

Le pair et l'impair

Notre première démonstration, la plus couramment mentionnée, est souvent présentée comme la démonstration originelle. Elle commence par supposer que l'on peut écrire la racine carrée de 2 sous la forme d'une fraction, c'est-à-dire $\sqrt{2} = p/q$ avec p et q entiers, pour finalement montrer que cela conduit à quelque chose d'absurde, ce qui impose de rejeter la supposition initiale (et, donc, de conclure que $\sqrt{2}$ est irrationnelle).

Ayant supposé que $\sqrt{2}$ s'écrit sous la forme d'une fraction p/q, l'on peut supposer, quitte à simplifier la fraction en divisant par 2, que p et q ne sont pas tous deux pairs (l'un peut l'être, l'autre aussi, mais pas les deux ensemble).

Élevons au carré la relation $p/q = \sqrt{2}$, pour obtenir $p^2/q^2 = 2$, puis multiplions les deux membres de l'égalité par q^2, ce qui donne $p^2 = 2q^2$. Le nombre $2q^2$ est nécessairement pair, donc p^2 (qui lui est égal) est pair lui aussi. Or seul un nombre pair est de carré pair, donc p est lui-même pair. Nous avons dit plus haut que nous pouvions supposer que p et q ne sont pas simultanément pairs, et donc, puisque p l'est, **q doit être impair**. Gardons ce résultat en mémoire, et remarquons par ailleurs que, puisque p est pair, il peut s'écrire sous la forme $2p'$ (p' est donc simplement le résultat de la division de p par 2). En remplaçant p par $2p'$ dans l'égalité précédente, il vient alors $(2p')^2 = 2q^2$, c'est-à-dire $4p'^2 = 2q^2$, ou encore, en divisant par deux : $2p'^2 = q^2$. De la même manière, que plus haut, cette égalité implique que q^2 est pair (car égal au nombre pair $2p'^2$), et donc finalement que **q est pair**. Parvenus à ce point de la démonstration, nous entendons résonner les mots d'Aristote qui, dans diverses parties de son œuvre, écrit que supposer la diagonale commensurable au côté revient « à confondre le pair et l'impair ». C'est en effet cette confusion à laquelle nous aboutissons, notre raisonnement nous ayant conduit à affirmer que q était à la fois pair et impair. La supposition initiale selon laquelle la racine carrée de 2 pourrait s'écrire sous la forme d'une fraction p/q se révèle donc finalement intenable, d'où l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

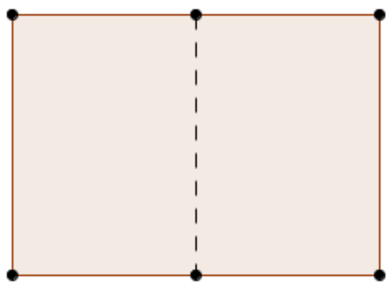
Comme on le voit, cette première démonstration consiste fondamentalement à étudier l'équation $p^2 = 2q^2$, plus précisément à montrer qu'elle n'a pas de solution en nombres entiers (c'est-à-dire est impossible à satisfaire avec des valeurs entières pour p et q, hormis bien sûr le cas sans intérêt où p et q sont tous

[5] Benoît Rittaud, *Le Fabuleux destin de $\sqrt{2}$*, Paris, Le Pommier, 2006, en recense plus d'une vingtaine. Il y est aussi indiqué en quel sens on peut considérer que le « premier nombre identifié comme irrationnel » pourrait être issu non de la géométrie mais de la théorie pythagoricienne de la musique (et que ce nombre serait $\log_2(3)$).

deux égal à zéro). L'incommensurabilité de la diagonale et du côté (i.e. l'irrationalité de √2) n'en est, à tout prendre, qu'un corollaire. Autre élément remarquable de cette première démonstration : son point nodal se situe dans l'opposition entre le pair et l'impair, opposition qui, dans une perspective plus philosophique que mathématique, met en scène une inexistence (celle d'un nombre entier q qui serait à la fois pair et impair). Or ni l'inexistence d'entiers tels que $p^2 = 2q^2$ ni l'inexistence d'un entier à la fois pair et impair n'est problématique en soi, nul « scandale » ne s'y trouve. Seules les conséquences géométriques de ce résultat peuvent apparaître comme scandaleuses à des pythagoriciens portés à une vision atomiste du monde.

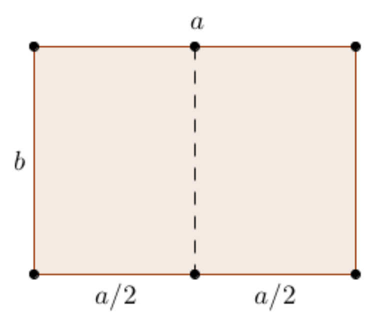
Les rectangles diagonaux

Notre deuxième démonstration part de la remarque suivante : appelons *rectangle diagonal* tout rectangle dont le rapport de la longueur à la largeur est égal à √2. Un rectangle diagonal possède l'intéressante propriété que, lorsqu'on le coupe en deux parts égales dans le sens de la largeur, les deux petits rectangles obtenus sont eux aussi diagonaux (voir encadré pour une démonstration).



Rectangles diagonaux et racine carrée de 2

Soit un rectangle diagonal de longueur a et de largeur b (qui, on le sait d'avance, ne peuvent donc pas être tous deux entiers). Par définition, $a/b = \sqrt{2}$, et donc $b/a = 1/\sqrt{2}$. Chacun des deux rectangles obtenus en découpant ce rectangle dans le sens de la largeur sont, eux, de longueur b et de largeur $a/2$.



Dans l'un de ces petits rectangles, le rapport de la longueur à la largeur est donc égal à $b/(a/2)$, ce qui se réécrit $2b/a$, ou encore, $2\times(1/\sqrt{2})$, c'est-à-dire $\sqrt{2}$.[6]

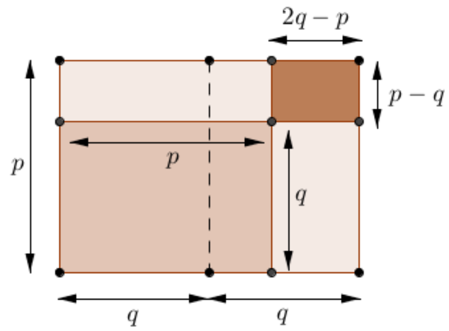
[6] On a en effet $2\times(1/\sqrt{2}) = 2/\sqrt{2} = (\sqrt{2}\times\sqrt{2})/\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Chacun des petits rectangles vérifie donc bien la propriété « longueur/largeur = √2 », ce qui fait d'eux des rectangles diagonaux.

Mentionnons en passant que cette propriété des rectangles diagonaux est à l'origine des formats de papier que nous utilisons. Ainsi, le format A4 (21 cm × 29,7 cm) est un rectangle diagonal approché ; en le pliant en deux, nous obtenons le A5 ; en mettant deux A4 côté-à-côte, nous obtenons le A3, et ainsi de suite.

De la même manière, si l'on colle deux rectangles diagonaux identiques par leur grand côté, le rectangle obtenu sera lui aussi diagonal.

Tout comme dans notre première démonstration, supposons qu'existent deux entiers p et q tels que $p/q = \sqrt{2}$. Construisons alors un rectangle de longueur p et de largeur q : par définition, ce rectangle est diagonal. En lui accolant sur sa longueur un rectangle identique, on obtient un nouveau rectangle diagonal plus grand (à droite du premier, sur la figure suivante). Pour finir, couchons un troisième rectangle diagonal identique au premier en bas à gauche.



Le petit rectangle sombre signalé dans le coin en haut à droite est, lui encore, diagonal (c'est une conséquence du théorème de Thalès). Une simple observation montre que sa longueur est de $2q–p$ et sa largeur de $p–q$. Les deux points cruciaux concernant ce nouveau rectangle diagonal sont d'une part que ses dimensions sont entières (puisque, p et q étant entiers, $p–q$ et $2q–p$ le sont aussi), d'autre part qu'elles sont plus petites que celles de notre tout premier rectangle diagonal. C'est visible sur la figure, mais on peut le démontrer aisément en remarquant que, d'une part, $p–q$ est évidemment plus petit que p et que $2q–p$, qui se réécrit $q–(p–q)$, est plus petit que q.

Ainsi donc, à partir d'un rectangle diagonal à côtés entiers (p et q), nous en avons obtenu un nouveau, également à côtés entiers ($p–q$ et $2q–p$) mais *strictement plus petit* que le premier. À partir du petit rectangle noir, la même procédure nous permettrait alors de construire un rectangle diagonal encore plus petit, et ainsi de suite. Or tous ces rectangles auraient des côtés entiers, ce qui n'est pas possible car, si grandes que soient les dimensions de notre premier rectangle, il est manifeste qu'on ne peut pas emboîter une infinité de rectangles de plus en plus petits dont les dimensions resteraient entières : une fois « épuisés » tous les entiers (positifs) disponibles entre 0 et p pour la longueur et entre 0 et q pour la largeur, il n'est plus possible d'aller plus loin.

C'est ainsi que, puisqu'on ne peut pas décroître indéfiniment tout en restant dans les entiers (positifs), l'on est conduit à reconnaître que la liberté que nous nous sommes initialement accordée de considérer un rectangle diagonal à côtés entiers n'était pas légitime. Il est donc impossible de trouver deux entiers p et q tels que $p/q = \sqrt{2}$, c'est-à-dire que la racine carrée de 2 est un nombre irrationnel.

De même que la première démonstration s'occupe moins de la racine carrée de 2 elle-même que de l'équation diophantienne $q^2 = 2p^2$, la seconde démonstration concerne moins √2 que la propriété fondamentale des rectangles diagonaux : leur rapport longueur/largeur reste inchangé une fois le rectangle plié en deux dans le sens de la largeur.

Dans cette deuxième démonstration, l'infini fait irruption de manière fracassante. C'est en effet l'impossibilité de se défaire d'un infini (celui des rectangles diagonaux de plus en plus petits) qui constitue l'essentiel du raisonnement. On peut toutefois arguer qu'un phénomène comparable se produit dans la première démonstration, même s'il est moins visible. Rappelons en effet que, dans celle-ci, nous avions commencé par supposer que p et q n'étaient pas tous deux pairs. Pour démontrer que nous avons le droit de faire cette hypothèse, il y a déjà, implicitement, le recours à un infini : la méthode consiste à diviser ensemble numérateur et dénominateur par 2 autant de fois que possible, jusqu'à ce qu'un des deux nombres devienne impair (les deux pouvant bien entendu le devenir au même moment). C'est le fait qu'une telle opération ne peut s'effectuer qu'un nombre fini de fois qui nous offre ce que nous cherchons.

Ce point illustre combien, en mathématiques, un changement de point de vue en apparence anodin peut avoir d'immenses conséquences. En l'occurrence, le plus ancien texte qui nous soit parvenu sur la question de l'irrationalité de √2 (envisagée alors sous l'angle de l'incommensurabilité de la diagonale au côté du carré) est celui d'Alexandre d'Aphrodise, au III^e^ siècle, et celui-ci, en lecteur d'Euclide scrupuleux, choisit une présentation comparable à celle que nous avons donnée et qui ne fait nulle part référence à l'infini, mettant en scène la dialectique du pair et de l'impair et non celle du fini et de l'infini.

L'anthyphérèse

La troisième démonstration est d'origine incertaine. Très élégante et très profonde, elle a donné lieu à beaucoup de commentaires depuis un siècle. Comme notre première, elle part du constat que, dans un carré, le rapport de la diagonale au côté est égal à √2.

L'argument fondamental de la démonstration repose sur un procédé appelé *anthyphérèse*, soit « mutuelle soustraction », également appelé algorithme d'Euclide. Les détails, un peu techniques, sont reportés en encadré, le lecteur moins à l'aise en mathématiques pourra s'en dispenser dans un premier temps.

L'algorithme d'Euclide (ou anthyphérèse) et la diagonale du carré

Dans ses *Éléments*, Euclide donne la technique suivante pour déterminer si deux grandeurs a et b sont commensurables ou pas. Prenons b plus petit que a. On retire autant de fois que possible b à a, jusqu'à ce que le reste r soit plus petit que b (en d'autres termes, on effectue la division euclidienne de a par b, qui a r pour reste). Si r est non nul (i.e. si a n'est pas multiple de b), alors on recommence avec b à la place de a et r à la place de b, et ainsi de suite.

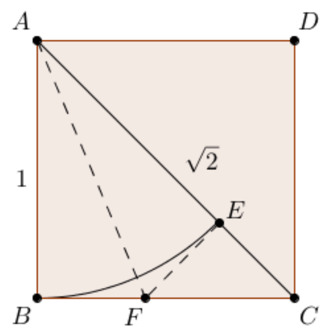
De deux choses l'une : soit le procédé finit par produire un reste nul, et alors a et b sont commensurables, soit cela ne se produit jamais, et alors a et b sont incommensurables.

Lorsque a et b sont des entiers (et où la question de la commensurabilité ne se pose donc pas), l'algorithme d'Euclide permet de déterminer leur plus grand diviseur commun, qui se trouve être le dernier reste non nul obtenu. Ainsi, pour $a = 40$ et $b = 15$, on effectue successivement :

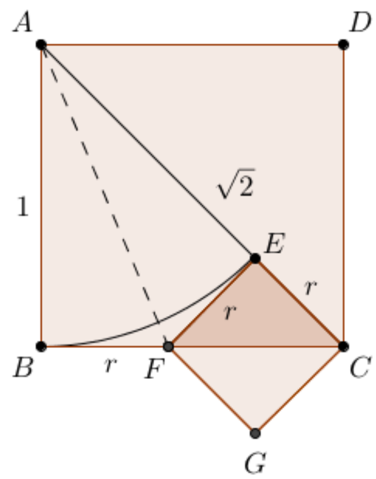
$40 = 2\times15+10$
$15 = 1\times10+5$
$10 = 2\times5+0$

et donc le plus grand diviseur commun de 40 et 15 est 5.

Montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ de cette manière, c'est appliquer l'algorithme d'Euclide à $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$ et constater qu'il ne prend jamais fin. On peut le faire à partir d'un carré $ABCD$ de diagonale $[AC]$.



Amenons, par pliage du côté $[AB]$, le point B sur la diagonale [AC], atteignant ainsi le point E, puis déplions. On a donc $AE = 1$, et donc $AC = \sqrt{2} = 1+EC$ (ou, pour mieux coller aux écritures précédentes, $\sqrt{2} = 1\times1+EC$). La seconde étape consiste donc à effectuer la division euclidienne de 1 par EC. Dans la suite, nous notons r cette longueur EC.



Le pliage effectué plus haut nous indique que les triangles ABF et AEF sont égaux, et donc que $BF = FE$. Dans le triangle AEF, l'angle en E est droit (puisqu'il est égal, par pliage, à l'angle en B du triangle ABF), et donc l'angle en E du triangle EFC est droit lui aussi. Puisque, dans ce dernier triangle, l'angle en C est un demi-droit, il en va de même de l'angle en F (la somme des trois angles d'un triangle étant égale à deux droits). Aussi le triangle ECF a-t-il ses angles en

F et en C égaux, il s'agit donc d'un triangle isocèle en E. Nous avons ainsi $EC = EF = r$. Puisque nous avons aussi $EF = FB$, nous avons mis au jour trois longueurs égales à r, indiquées sur la figure.

La division euclidienne de 1 par r peut alors s'effectuer en retirant r à $1 = BC$ (à l'aide du segment [BF]). Il nous reste FC. Voici alors le nœud de la démonstration : vouloir retirer r à FC, c'est exactement appliquer l'algorithme d'Euclide dans le carré $EFGC$: nous nous y posons la question de savoir si la diagonale [FC] est commensurable à son côté [EF]. L'algorithme d'Euclide produira la même chose qu'au début avec notre carré $ABCD$: l'échelle change, mais l'algorithme, lui, est revenu à son point de départ. Il ne finit donc jamais, ce qui prouve finalement que les longueurs AC et AB sont incommensurables, c'est-à-dire que √2 est irrationnelle.

Tout un courant d'historiens des mathématiques ont voulu voir dans la troisième démonstration (ou dans une autre au procédé analogue, proposée par Kurt Von Fritz en 1946 et qui utilise un pentagone régulier[7]) l'archétype des toutes premières démonstrations d'incommensurabilité, venues de Grèce antique. Après avoir connu un certain succès, et permis d'élaborer beaucoup de très belles démonstrations diverses d'irrationalité, cette vision des choses est aujourd'hui beaucoup contestée, l'un des points d'achoppement étant le manque total de référence explicite pour l'étayer. (En particulier, Euclide lui-même n'exploite nulle part son propre algorithme pour établir les résultats d'incommensurabilité qui viennent ensuite dans les *Éléments*.)

Quoi qu'il en soit, cette troisième démonstration met en scène l'infini de façon frappante au travers de la mise en abyme de carrés. Bien qu'utilisant des techniques différentes, on pourrait donc penser que cette troisième démonstration relève de la même dialectique du fini et de l'infini que la démonstration avec les rectangles diagonaux. Il y a pourtant une importante différence, qui tient au caractère répétitif de l'anthyphérèse. Celui-ci fournit une expression explicite de la racine carrée de 2 sous forme de nombres. Quelques opérations algébriques complémentaires, que nous passons sous silence par souci de brièveté mais qui n'ont rien d'extraordinairement compliqué, permettent de déduire de notre démonstration l'égalité suivante :

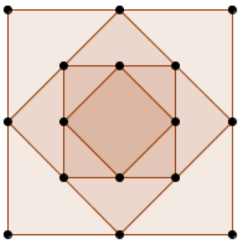
$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}.$$

On appelle *fraction continue* une telle expression, qui montre des fractions emboîtées dont tous les numérateurs sont égaux à 1 et dont la « diagonale » est constituée de nombres entiers, les *quotients partiels*. Ainsi, la suite 1, 2, 2, 2, 2,… évoquée plus haut n'est autre que la suite des quotients partiels de l'expression de √2 sous forme de fraction continue. Les points de suspension indiquent, bien sûr, que l'égalité n'est valable qu'à condition de poursuivre « à l'infini ». L'infini est donc toujours là et bien là… à la différence fondamentale que nous avons cette fois, grâce à l'anthyphérèse, récupéré un infini *périodique*, en ligne avec le caractère répétitif des figures qui se construisent dans le raisonnement

[7] Kurt Von Fritz, « The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum », *Annals of Mathematics*, vol. 46, n° 2, pp. 242-264, 1946.

géométrique. Du point de vue de l'analyse mathématique et de la « gestion de l'infini », il n'y a guère de différence entre l'expression précédente et un nombre comme 1/3, avec sa banale écriture décimale périodique (0,33333…) : dans les deux cas, nous exprimons un nombre à partir d'une *structure de données* (écriture décimale pour l'un, fraction continue pour l'autre) n'utilisant que des nombres entiers et les opérations élémentaires (addition, multiplication, division) et qui débouche sur une expression périodique.

Si la démonstration anthyphérétique de l'irrationalité de √2 fait elle aussi apparaître un infini, il y a donc tout de même une différence capitale avec les deux autres : cet infini ouvre la voie à une représentation périodique de √2, qui relève au fond plutôt du fini (tel un simple cercle). La figure de la démonstration donne à voir des carrés en abyme qui peuvent certes poser un problème la une vision atomiste de l'univers qui était celle des pythagoriciens, mais sans doute ne faut-il pas exagérer la portée de cette difficulté : après tout, une figure comme la suivante, faite de carrés que l'on peut tout autant emboîter à l'infini, montre le même type de mise en abyme sans manifester pour autant la présence d'une incommensurabilité (le fait que le rapport √2 y apparaisse n'est pas significatif, de multiples variantes de la figure sont possibles dans lesquelles tous les segments sont commensurables).



Ironie de l'histoire, c'est précisément dans l'idée de prouver la réalité du « scandale logique » de Tannery que von Fritz avait proposé l'idée que l'existence de grandeurs commensurables avait été établie par les pythagoriciens grâce à l'anthyphérèse[8], alors même que, finalement, la périodicité qui en est l'issue est probablement ce qui éloigne le plus cette technique d'une confrontation frontale avec l'infini, ce concept resté, lui, si longtemps scandaleux pour les mathématiciens.

*

* *

[8] Il la proposait pour la diagonale et le côté du pentagone régulier, ce qui donne un développement en fraction continue de (1+√5)/2 qui se trouve être tout aussi périodique que celui de √2.