DOGMA

Mlika Hamdi

La théorie modale des types linguistiques constructibles et la critique de la philosophie platonicienne de l'existence

Dans l'ouvrage sur lequel je vais m'appuyer pour mettre au clair les traits distinctifs du projet antiplatoniste du philosophe américain Charles S. Chihara, à savoir *Constructibility and Mathematical Existence*1, l'auteur nous dit clairement, qu'ayant été longtemps influencé par les idées antimodalistes de Quine, il ne pouvait pas conclure à une solution systématiquement satisfaisante aux problèmes qui relèvent de l'épistémologie et de l'ontologie des mathématiques. Dans ce livre, Chihara propose donc un système philosophique au sujet des mathématiques, directement opposé à celui élaboré par Quine, étant donné que ce dernier écarte définitivement la possibilité d'utiliser les notions modales, même de façon limitée et partielle comme le préconise à juste titre Hartry Field (1989).

Avant la rédaction de son ouvrage *Constructibility and Mathematical Existence*, la fidélité à la pensée antimodale de Quine contraignait le philosophe californien de Berkeley à élaborer uniquement une approche de la connaissance mathématique qui ne tire pas entièrement profit de la richesse logique et philosophique de telles notions.

Je peux affirmer qu'entre les quatre livres publiés par Charles S. Chihara, à savoir, *Ontology and the Vicious Cercle Principle* (1973), *Constructibility and Mathematical Existence (1990), The Worlds of Possibility (*1998) et *A Structuralist Account of Mathematics (2004)*, s'effectue un mouvement évolutif dans l'utilisation des constructions et des notions modales, qui va d'une démarche « prédicative » partiellement modaliste, à une démarche « constructibiliste » qui cherche, moyennant la logique modale (une logique qui ne peut être que de second ordre), et de la théorie sémantique des mondes possibles (telle qu'elle a été developpée dans les travaux de S. Kripke), à éliminer toute lecture platonicienne, même présentée dans des termes structuralistes, des affirmations d'existence en mathématiques.

[1] Clarendon Press, 1990.

Dans *Constructibility and Mathematical Existence*, Chihara commence par prendre une certaine liberté dans l'utilisation des notions modales, et nous pouvons sans doute dire que tout le contenu de ce livre propose un programme antiplatoniste assez volontariste, ayant pour objectif la dé-construction et la mise en question de l'autorité philosophique de Quine.

En vérité, le but de ma démarche ici ne consiste pas dans une étude des notions de continuité et de rupture dans la pensée philosophique de Chihara, ni d'analyser les traits de l'évolution de son programme sur les mathématiques. Je chercherai plutôt à esquisser une analyse des traits de son projet constructibiliste des mathématiques et en tracer les limites, en tant qu'il s'oppose nettement aux interprétations données par les platonistes modernes tels que Quine au sujet de la notion d'existence. En d'autres termes, je voudrais étudier les traits spécifiques de cette philosophie chiharienne des mathématiques que la méthode dite modalo-constructibiliste, en tant que méthode qui s'oppose diamétralement à toute philosophie platonicienne de l'existence, tend à résumer et à exprimer.

Pour l'ancien étudiant de la rue d'Ulm, le platonisme, sous toutes ses formes, est intenable. Chihara écarte aussi bien le platonisme littéral de Frege et de Gödel que celui néo-classique de Quine et de Maddy. Le platonisme consiste en général dans la thèse qui assume ontologiquement les objets abstraits des théories mathématiques, et qui les traite sur le même plan que les objets ordinaires et les objets théoriques. De ce point de vue, la différence entre le platonisme des anciens et celui des modernes n'est que de forme, et n'altère pas le sens profond de cette théorie qui demeure identique.

Chihara renvoie donc dos à dos les platoniciens classiques (qui parlent d'un accès intellectuel direct aux entités mathématiques, tel que Gödel), et ceux néo-classiques (qui parlent d'un accès indirect à ces entités, tel que Quine).

À l'instar d'un philosophe antiplatoniste comme Geoffrey Hellman, l'intention de Chihara consiste à utiliser des ressources tirées en grande partie de la notion modale de possibilité logique pour ré-interpréter les mathématiques. Or, la méthode utilisée par Chihara n'est pas modalo-structuraliste comme elle est représentée dans la théorie de Hellman, mais modalo-constructibliste. La théorie constructibiliste tend avant tout à écarter la théorie des ensembles, car cette théorie pose les ensembles comme étant des objets existants, et cherche, de surcroît, à étudier les relations entre ces objets au moyen du prédicat d'appartenance. Au lieu d'être à propos des objets-ensembles, la théorie constructibiliste est une théorie qui porte sur les phrases ouvertes: elle nous dit quelles sont les phrases ouvertes d'un certain genre qui sont constructibles et comment ces phrases ouvertes constructibles peuvent être reliées les unes aux autres au moyen de la relation primitive de satisfaction[2]. Sur le plan formel, la théorie modalo-constructibiliste utilise un langage logique qui inclut à côté des quantificateurs existentiel et universel de la logique du premier ordre, des quantificateurs de constructibilité qui sont selon les termes de Chihara « des séquences de symboles primitifs. »[3]

« The basic idea of the approch to be taken in this work, écrit Chihara, is to develop a mathematical system in which the existential theorems of traditional mathematics have been replaced by constructibility theorems : where, in traditional mathematics, it is asserted that such and such exists, in this system it will asserted that such and such can be constructed. Now it is clear that I wil need a more powerful notion of constructibility than that of the Intuitionists if I am to obtain anything like classical mathematics."[4]

Cette méthode met donc au point une compréhension non littérale des assertions d'existence en mathématiques, en interprétant « modalement » ces assertions. En effet, Chihara propose, non seulement de critiquer le platonisme et de rejeter, par conséquent, tout le réalisme ontologique qu'il implique, mais aussi d'élaborer un système formel nouveau qui a pour finalité de fournir un substitut, à la fois conceptuel et philosophique, au système platonicien classique[5]. Ce système tend également à représenter une forme d'antiplatonisme qui veut être conceptuellement indépendante des autres théories alternatives. Il cherche à incarner à la fois une critique philosophique de l'interprétation platoniste, et une ré-interprétation des mathématiques dans laquelle toutes les entités abstraites, telles que les nombres, les classes, etc., sont complètement éliminées.

Comme j'ai essayé de le préciser, les conditions de cette ré-interprétation se trouvent dans une utilisation non standard des modalités logiques, et dans une révision partielle des lois de la théorie de la quantification classique.

En effet, selon Chihara, le platoniste a tort en donnant à l'existence mathématique les mêmes mérites que l'existence empirique. À l'origine de cette erreur, il y a la confusion entre la notion d'objet physique et celle d'objet mathématique. En mettant ces deux types d'objets sur le même plan ontlogique, le platonicien est conduit à traiter les nombres, les classes, etc., et les objets physiques concrets comme s'ils étaient dotés d'une même nature. Cette confusion dans la philsophie de Quine entre l'objet physique concret et l'objet mathématique idéal ou abstrait, est désignée par Chihara,

[2] Chihara (2004), p. 170.
[3] Ibid. p. 170.
[4] Chihara (1990), p. 25.
[5] Chihara (2004), p. 169: "The term of 'constructibility theory' is used …ambiguously: sometimes to denote my general theory of constructibility…, and sometimes to denote the formal theory of constructibility." Il fait remarquer que cette ambiguîté est similaire à celle qu'on trouve exprimée dans la théorie russellienne des types. Note 1, p. 169.

comme étant à la racine même de la philosophie platonicienne de l’existence.

« Sets for Quine, écrit-il, are unchanging abstract objects the existence of which it is reasonable to postulate. For we have the same sort of reasons for postulating the existence of sets, he believes, that we have for postulating the existence of molecules: basically, we have a kind of scientific evidence for the existence of sets.”[6]

Selon l’alternative « constructibiliste », toute affirmation d’existence en mathématiques doit être comprise, non pas littéralement (*at face value*), mais modalement. Dans les termes de cette compréhension non littérale, nous n’assumons l’existence d’aucun type d’objet abstrait, et le langage des mathématiques cesse d’être un langage référentiel au premier degré.
Cette méthode modalo-constructibiliste peut être caractérisée, sans doute, comme une nouvelle version de la théorie des types simples de Russell. En effet, à l’instar du père de la philosophie analytique moderne, Chihara n’accorde, dans son système, aucune place ni pour les ensembles, ni pour les classes. Nous pouvons sans doute affirmer que la théorie modalo-constructibiliste est une « no-Class theory », c’est-à-dire une théorie, comme celle de Russell, sans classes et sans ensembles. C’est pour cette raison que nous avons appelée la théorie que propose Chihara par théorie des types constructibles.
Pour un platonicien moderne comme Quine, cette situation est difficile à défendre, car comment peut-on éliminer ces objets que sont les classes sans mettre en question la possiblité des sciences mathématiques elles-mêmes ? À l’antipode des théories sans classes de Russell et de Chihara, le philosophe de Harvard élabore une théorie que nous pouvons qualifier de « Class theory ». C’est par opposition à une telle théorie qu’il juge foncièrement platonicienne, que Chihara cherche à éliminer toute référence aux classes et aux ensembles, même si cette référence advient de façon indirecte. Le fait d’admettre le langage de la théorie des classes ou de retraduire ce même langage dans un autre qui n’est référentiel qu’en apparence, ne résout pas le problème. La stratégie que Chihara juge efficace, consiste dans l’élimination de toute référence aux entités abstraites moyennant l’élaboration d’une théorie dans laquelle on parle plutôt de la « constructibilité » des phrases ouvertes selon des règles formelles quantificationnelles d’un type nouveau.
Tout le programme de Chihara repose sur le principe suivant: la propriété de « constructibilité » pour chaque type de phrases ouvertes peut faire aisément tout le travail de la théorie platoniste des ensembles, ce qui nous dispense, par conséquent, de nous référer à ces entités abstraites qui sont absolument douteuses et qui posent un certain nombre de problèmes sur le

[6] Chihara (1990), p. 6.

plan épistémologique. De cette manière-là, nous pouvons formuler les théories physiques que les scientifiques contemporains admettent sans pour autant être obligés de nous engager sur l'existence des nombres, des classes, ainsi de suite.

Or, pour Quine, et du point de vue de ses arguments d'indispensabilité, cet objectif est difficile à atteindre, car nous ne pouvons pas nous passer, dans une telle tâche, de quantifier sur ces objets abstraits, et par conséquent, de nous engager ontologiquement sur leur existence qui est du même ordre que celle des objets ordinaires du sens commun et de ceux physiques tels que les atomes ou les particules microscopiques de la physique des quanta.

Un des traits distinctifs du système « constructibiliste » c'est sans doute son caractère non-constructiviste. Il ne s'inscrit pas dans le même registre que les alternatives antiplatonistes formulées par les intuitionnistes et les constructivistes en général, tels que Brouwer, Dummett, Bishop et bien d'autres. C'est un système hautement « imprédicatif » qui s'inspire directement de la théorie des types simples de Russell, et peut être mis au même niveau que la théorie des ensembles de Zermelo.

Comme l'a fait savoir Hellman dans un commentaire critique du livre de Chihara (1990), la notion de « constructibilité » a un sens bien différent de celle que nous trouvons dans le « constructivisme »:

« Le terme de « constructibilité », écrit Hellman, a un sens tout à fait différent, faisant référence simplement à la possibilité de « formuler (« de construire ») des phrases ouvertes, les objets de base de la théorie. Le raisonnement logique demeure classique, et des axiomes hautement non-constructivistes sont adoptés. »7

Dans un tel système, il n'y a, en revanche, aucune place pour des assertions d'existence. Pour parvenir à ce résultat, Chihara situe son propre programme dans le contexte réductionniste des théories de Frege et de Russell. Tout en partant du principe qui atteste la possibilité de réduire tous les nombres aux nombres naturels, c'est-à-dire, qui atteste la possibilité d'obtenir à partir de ces seuls derniers tous les autres nombres, il cherche à aller plus loin que Frege et Russell dans ce travail d'élimination ontologique. En effet, Chihara se dit poursuivre, avec le même esprit, ce processus qui permet de se débarrasser des entités abstraites. Pour cela, la théorie de Russell, qui est admissible quant à sa méthode générale, doit être améliorée et enrichie grâce aux nouvelles possibilités que la logique modale moderne offre pour le traitement des questions qui relèvent de la l'ontologie des mathématiques. Il est vrai que nous comprenons mieux l'orientation philosophique générale du système de Chihara une fois que nous l'avons comparé aux analyses logiques de l'arithmétique élaborées

---

[7] Hellman: « Review of Constructibility and Mathematical Existence », *Philosophia Mathematica* (3), 1993, p. 77.

respectivement par Frege et Russell, et c’est Chihara lui-même qui trouve utile de procéder directement à une telle comparaison8. Chihara prend comme exemple l’énoncé de cardinalité suivant:

« Il y a cinq livres sur la table ».

Cet énoncé a été analysé par Frege comme étant un énoncé qui postule les quatre types d’objets suivants:

(i) Des objets ordinaires tels que les livres.
(ii) Des objets linguistiques tels que les prédicats et les phrases ouvertes.
(iii) Des objets abstraits qui sont les références des prédicats et des phrases ouvertes, à savoir des concepts.
(iv) Des extensions et des concepts.

L’analyse logique de ce type d’énoncé postule, selon Frege, que les mathématiques ont besoin des extensions et des concepts pour réduire tous les nombres aux nombres naturels, et donc nous devons admettre les objets abstraits comme des objets ultimes, étant donné que les extensions des concepts ne peuvent être constituées que par des classes et des ensembles. Ces extensions des concepts arithmétiques que sont les classes ou les ensembles sont pour Frege des objets logiques. Pour sa part, Russell est amené, par sa fameuse « no-class » théorie, à mettre en cause les conclusions de Frege à la lumière de ce qu’il a décelé comme paradoxes au niveau de la théorie des ensembles, et propose d’éliminer l’analyse en termes de concepts et d’extensions de concepts au profit de celle qui n’admet que les fonctions propositionnelles comme objets abstraits admissibles.
Pour Chihara, il s’agit d’appliquer plus radicalement la méthode russellienne pour écarter les objets fregéens non pas au profit des objets préconisés par Russell, mais au profit des phrases ouvertes elles-mêmes.
En considérant que les phrases ouvertes sont en quelque sorte les objets « basiques » de sa théorie, il s’agit bien plus que d’une simple substitution de tels objets aux concepts (et à leurs extensions) fregéens ou aux fonctions propositionnelles de Bertrand Russell, en tant qu’ils appartiennent au domaine des objets abstraits, puisque nous sommes obligés conjointement de procéder à un remaniement partiel de la logique

[8] Chihara: « Modality Without Numbers », article publié dans: *Philosophy of Mathematics,* Proceeding of the 15TH International Wittgenstein-Symposium. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna 1993. pp. 253-268

de la quantification classique, en introduisant des quantificateurs de constructibilité, qui sont des nouveaux quantificateurs non classiques, censés combler le vide logique que crée le nombre limité des phrases ouvertes qui sont à notre disposition.

« Il semble, écrit Chihara, qu'un problème apparaît avec la substitution des phrases ouvertes aux concepts, qui consiste dans le fait qu'il n'y a pas assez de phrases ouvertes pour former une théorie acceptable des mathématiques. Pour résoudre ce problème (apparent), j'ai introduit des quantificateurs de constructibilité, de façon à ce que, là où Frege affirme l'existence d'un concept, j'affirme, pour ma part, la constructibilité d'une phrase ouverte appropriée. »9

L'idée centrale de Chihara consiste donc à utiliser le genre de formalisme que propose la théorie russellienne des types simples pour éliminer toute quantification sur les classes, et essayer, en se débarrassant de la relation ensembliste d'appartenance, considérée comme un prédicat platoniste fort, de quantifier modalement sur les phrases ouvertes elles-mêmes. Grâce à ce type de quantification modale et à la relation de satisfaction qui prend finalement la place du prédicat d'appartenance, Chihara peut se vanter d'avoir réussi à éliminer les ensembles de l'ontologie de la théorie des types simples, et par-là, à éliminer tous les objets abstraits de l'ontologie des mathématiques en général.
Nous avons pu voir comment la théorie de Chihara pouvait être caractérisée comme une version de la théorie des types de Russell, particulièrement dans le sens où elle est une théorie sans classes (no-class theory). En effet, l'un des points communs entre le système qu'élabore Chihara et la théorie des types simples de Russell, consiste dans leur refus de donner une place aux classes et aux ensembles. Or, comme nous l'avons précisé, Chihara cherche à aller plus loin, et veut éliminer la théorie des ensembles sous toutes ses traductions. En ce sens, nous ne trouvons, dans son système, aucune intention de traduire les ensembles dans les termes d'autres entités moins fortes ontologiquement. En effet, alors que Russell et Field construisent (pour des raisons radicalement différentes) des règles de traduction qui permettent de former des énoncés, n'ayant pour références que des individus ou des fonctions propositionnelles, Chihara veut éliminer toute référence aux ensembles, même apparente, et élabore un langage formel dans lequel nous parlons uniquement de la constructibilité des phrases ouvertes qui fonctionneraient comme des ensembles.
Pour Chihara, les phrases ouvertes constructibles sont considérées comme les substituts des ensembles, et pour cela, il exploite le trait principal des ces derniers dans la théorie platoniste elle-même, à savoir l'extensionnalité. Par-là, tout son programme consiste à déterminer les conditions

[9] Chihara (1990), p. 255.

philosophiques sous lesquelles la substitution de la théorie des phrases ouvertes constructibles à la théorie des entités ensemblistes abstraites pourrait s'opérer.
En effet, il n'est pas question dans le système de Chihara d'éliminer les quantificateurs de la théorie extensionnelle standard et de leur substituer ceux de constructibilité. Son système contiendrait finalement les deux types de quantificateurs: les quantificateurs modaux et les quantificateurs standard, et c'est aux premiers que revient la tâche d'exprimer la notion d'existence mathématique. Or, le système logique de Chihara a besoin des ressources logiques de la sémantique des mondes possibles. Sans cette théorie foncièrement modaliste, l'usage des nouveaux quantificateurs non classiques de constructibilité ne serait pas bien défini. Mais, ce qui gêne Chihara c'est le problème du réalisme sémantique te scientifique auquel il adhère. Je vais essayer de comprendre comment Chihara va-t-il réussir à harmoniser, au sein de son système, son antiplatonisme modal et son réalisme scientifique ?
En vérité, bien qu'il soit un farouche adversaire du réalisme existentiel dans le cas des idéalités mathématiques abstraites, il défend, contre l'instrumentaliste et le déflationniste, une conception dans laquelle les mathématiques constituent une science vraie indépendante de la logique et de la physique. Pour un philosophe comme Hartry Field, les mathématiques sont fausses et n'affirment rien qui ne soit pas déjà impliqué dans la logique (sans la théorie des modèles) et dans la physique.
Pour Chihara, la philosophie « fictionaliste » de Field est une forme d'instrumentalisme qui met en question les aspects réalistes de la science au niveau de sa valeur pour la connaissance et de son objectivité. Les mathématiques ne se contentent pas d'être uniquement un instrument au service des objectifs de la science physique ou d'une autre science. L'exigence de conservativité comme condition requise par Field pour décider de l'acceptabilité des théories mathématiques, et sa conclusion fictionnaliste au sujet de tous les théorèmes, sont inadmissibles pour Chihara.
Contre Field, Chihara défend donc la thèse du réalisme épistémologique dans le cas des mathématiques. Or ce type de réalisme ne signifie pas la même chose que celui admis par Quine et que nous trouvons à la base de son platonisme. Autrement dit, le réalisme épistémologique ne veut pas dire pour lui l'assimilation du mode de connaissance en mathématiques à celui que nous trouvons dans la science physique, c'est-à-dire, un mode de connaissance qui se base sur l'observation et l'expérience. En effet, pour Quine, nous obtenons la connaissance des objets physiques et celle des objets mathématiques selon la même méthode, c'est-à-dire, à travers l'expérience. Ce type de réalisme épistémologique justifie le platonisme dans le sens où il lui procure un type d'évidence scientifique. Chihara

s’attaque directement à cette connexion entre le platonisme et le réalisme épistémologique, et cherche à battre en brèche l’hypothèse quinéenne. Même si nous regardons la nature de ce type d’évidence d’un point de vue strictement pragmatique, comme nous invite Quine à le faire, il nous serait très difficile de valider la thèse platonicienne et sa conception de l’existence.
L’un des points fondamentaux sur lesquels Field et Chihara ne sont pas d’accord, c’est la question de la vérité des énoncés mathématiques. Contrairement à Field qui croit que les mathématiques n’ont pas à être vraies pour être utiles, et bien que ces dernières n’affirment rien d’existentiel et n’ont pas de sujet d’étude autre que des possibilités de formuler et de construire un espace (logique) propre aux phrases ouvertes, Chihara croit fermement que les mathématiques découvrent des vérités, et que ces vérités sont aussi objectives que toutes les autres vérités scientifiques.
Pour lui, le déflationnisme du concept de vérité et le caractère déductif des notions de connaissance et d’information en mathématiques ne tiennent pas. Comme nous l’avons pu le constater, Field conclut sur la base de l’absence de faits proprement mathématiques à l’absence même de toute connaissance mathématique. Chihara n’accepte pas cette conclusion, car nous pouvons prouver, même s’il n’y a pas de faits mathématiques, qu’il y a un type de connaissance purement mathématique qui ne soit pas réductible à aucune forme de connaissance logique (dans le cas de Field) ou de connaissance physique (dans le cas des physicalistes, y compris probablement une certaine facette de Quine.)

“That positing mathematical objects is to be justified in the same way that physicists justified their positiong of moolecules is intimately linked to another idea that emerges from quine’s writings on this topic : it is suggested that which mathematical theory we should take to be true should be determined empirically by assessing the relative scientific benefits that would accrue to science from incorporating the mathematical theories in question into scientific theory. It is as if the mathematician should ask the physicist which set theory is the true one! I do not believe that many mathematicians find this Quinian picture very appealing.” [10]

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Chihara Charles. S. (1961), "Wittgenstein and logical Compulsion", *Analysis*, Vol 21, No 6, Juin. Repris dand Pitcher (G), Eds, 1966. Repris aussi dans Canfield (J) Eds, 1986.

[10] Chihara (1990), p. 15.

____(1963), «Mathematical Discovery and concept formation. », *Philosophical Review*, 72/.
____(1965), « On the possibility of Completing an Infinite Process. », *Philosophical Review*, 74/1965.
____(1968), « Our ontological commitment to universals », *Nous*, Vol 2/1968.
____(1973), *Ontology and the Vicious Cercle Principle*, Ithaca.
____(1980), « Ramsey's Theory of Types: suggestions for a Return to Fregean Sources. », in: Mellor (D.H) Eds pp.21-47.
____(1882), « A gödelian Thesis regarding mathematical objrcts: Do they exist ? And can we perceive them?», *Philosophical Review*, Vol 91, pp.211-227.
____(1984), « A simple type theory without platonic domain », *Journal of philosophical Logic*, Vol 13, pp249-83.
____(1990), *Constructibility and mathematical Existence*, Clarendon Press, Oxford
Edition 2, 1991.
____(1992), « Modality without worlds » In: J. Czermak eds. *Philosophy of Mathematics*.pp.253-268.
____(1995), « The Mystery of Julius: A paradox in Decision Theory » *Philsophical studies*, Vol.80. N°1. Octobre, pp. 1-16.
____(1998a), *The World of Possibility : Modal Realism and the Semantics of Modal Logic*. Oxford University Press, Oxford.
____(1998b), " Tarski's thesis and the Ontology of Mathematics", dans Schirn Matthias Eds (1998), pp.157-172.
____(2004), *A Structural Account of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Hellman Geoffrey: « Review of Constructibility and Mathematical Existence », *Philosophia Mathematica* (3), 1993