Mlika Hamdi

Applicabilité et physicalisation au sujet des mathématiques

> Le sensible n'est pas abandonné : ce n'est pas le quitter que d'agir sur lui. Tout objet abstrait obtenu, par exemple, par thématisation est un geste sur geste…, sur un geste sur le sensible primitif. Le champ thématique n'est donc pas situé hors du monde, mais est transformation de celui-ci.
> Cavaillès

C'est à Mark Steiner (1995, 1997) que revient le mérite d'avoir mis en valeur un certain nombre de problèmes philosophiques qui tombent dans le champ de l'applicabilité ou de l'effectivité[1] des mathématiques, et de les avoir placés, après Frege sans doute, au centre même de ce que nous appelons aujourd'hui leur philosophie. Il s'agit de décrire l'essence du discours mathématique et le mode d'être de ses objets (s'ils existent !), et plus particulièrement, de mettre au jour les formes possibles de son utilisation par les autres discours (l'économie, la politique, la physique des quanta, par exemple, lorsqu'elles utilisent les statistiques et le calcul des probabilités) et de son application dans l'étude des phénomènes empiriques. En effet, l'une des questions centrales de cette branche fertile de la philosophie analytique que nous appelons la philosophie des mathématiques, est la question de la nature des rapports qui relient (ou délient) les mathématiques (surtout la géométrie) au monde physique et au champ de l'expérience: Quel est le rapport des lois et propositions mathématiques au monde réel et quel est leur véritable statut dans une connaissance irréversiblement symbolique qui tend à caractériser le plus objectivement possible les traits et les relations de ce réel ? À quel point Mill a-t-il raison de dire que les lois arithmétiques sont, comme les lois de la nature, de nature inductive ? La riposte analytique de Frege est-elle justifiée ? Peut-on déclarer qu'elle a permis de réduire à néant la possibilité même d'une philosophie empirique des mathématiques ? Dans quel sens les mathématiques sont-elles dites en relation avec l'expérience et avec le monde dans le sens où elles sont dites témoigner de l'harmonie des choses ? Comment doit-on comprendre les relations entre les aspects appliqués et ceux purs des mathématiques ? Est-ce dans les termes d'un clivage ou dans ceux d'une continuité constitutive du discours mathématique lui-même qui va jusqu'à considérerles mathématiques appliquées elles-mêmes comme une forme de mathématiques pures (et par-là la physique mathématique comme un discours théorique pure) ? Dans quelles circonstances s'est opéré précisément ce clivage et doit s'articuler

[1] Le terme d'effectivité des mathématiques comme étant quasiment équivalent à celui d'applicabilité a été employé par Patras (2001), p. 171. De son point de vue, les mathématiques s'ouvrent de plus en plus auréel, et la démarcation *appliqué/pur* au sujet des mathématiques laisseratrès probablement la place « à d'autres découpages conceptuels », p. 170.

cette continuité si elle existe ? Cette division entre deux aspects propres aux mathématiques modernes est-elle toujours d'actualité ou serait-elle dépassée et remplacée par d'autres choix conceptuels qui conviennent beaucoup mieux à la nature du travail mathématique dans sa spécialisation aujourd'hui ? À quel point peut-elle rendre compte de la nature du discours mathématique eu égard à son essence propre sans nier son origine historique et son rapport à l'expérience ? Les mathématiques sont-elles réduites à un simple langage, au sens wittgenstienien du terme, pour la physique et pour la science en général ? Ou bien offrent-elles aux autres sciences (et à tous les domaines de la vie), outre le fait d'être une simple science abstraite et pure, de véritables méthodes pratiques et efficaces ? Pour reprendre deux belles formules utilisées par Bouveresse[2] et Lautman, les propositions mathématiques ont-elles un contenu descriptif et cognitif autonome au-delà de « l'expression de formes, de normes ou de règles pour la description de la réalité. »[3] ? Les mathématiques seraient-elles un simple « système de transformations formelles permettant de relier les unes aux autres les donnés de la physique »[4] ?

Nous ne pouvons répondre à toutes ces questions que si on les traite à partir d'une analyse philosophique du problème de l'applicabilité des mathématiques au réel. C'est ce que je vais tenter de faire dans ce travail en prenant comme deux exemples les théories de Quine et de Michel Paty.

Il est incontestable que pour des philosophes qui défendent des conceptions physicalistes et empiristes des mathématiques, les choses sont claires: les mathématiques dérivent de l'expérience, et leur domaine consiste dans l'étude despropriétés des objets physiques. De ce point de vue, le problème de leur applicabilité au monde réel ne se pose pas, puisqu'elles dérivent de ce monde et c'est normal qu'elles lui soient appliquées en retour, et pas uniquement de façon rapprochée et approximative. Pour eux, toutes les sciences, y compris les mathématiques sont des sciences expérimentales. Les mathématiques ne constituent pas une exception par rapport au principe de l'origine expérimentale de notre connaissance scientifique en général, et à la loi commune suivante : « Rien ne pénètre dans notre esprit qu'après avoir d'abord passé sous le témoignage de nos sens. » Ainsi, les objets qui constituent la matière du discours mathématique (le 'bidonville' de la réalité mathématique que le mathématicien admet mais que le philosophe doit 'nettoyer', si j'ose reprendre les mots de l'illustre Quine) ne jouissent d'aucune identité. Ils n'existent nulle part en dehors de leurs supports physicalisés dans la nature ou de l'esprit humain qui les crée. Les lois et propositions mathématiques, en tant que généralisations approximatives inférées à partir de nos observations, concernent directement l'état empirique du monde: des mathématiques idéelles pures, coupées du réel et du monde, et n'y trouvant pas leurs origines et leurs impulsions décisives, ne sont qu'un mythe. Ce mythe est d'autant plus encouragé par le fait même que les mathématiques sont censées porter sur des formes séparées, par abstraction, de la matière, et « ne se rapportent pas aux objets de la réalité mais à ceux de notre imagination »[5].Il est sans doute probable que, pour les physicalistes, il n'y a pas un domaine qui serait spécifiquement et exclusivement mathématique, constitué par des entités abstraites, et nous pouvons dire, que de leur point de vue, le progrès des

[2] Bouveresse (1987),p. 69
[3] Ibidem.
[4] Lautman (1977),*Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Union Générale d'Editions, p. 23-24.
[5] Einstein(1972) p. 75. « Pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité. »(Ibid. p. 76)

mathématiques et leur capacité à inventer de nouvelles théories et hypothèses, aussi formelles et symbolisées qu'elles puissent nous apparaître, ont toujours été motivés par la résolution de quelques problèmes qui sont strictement physiques et qui concernent avant tout les phénomènes physique du monde sensible. L'esprit structuraliste et axiomatique de Bourbaki, avec lequel le groupe a cherché, malgré une action timide de Pierre Cartier, à systématiser l'ensemble des mathématiques et à pointer en direction de leur unité, serait-il en train de s'évanouir progressivement[6] pour laisser la place au 'mal' nécessaire de la spécialisation, et à une explication empiriste, physicaliste et instrumentaliste du type que nous trouvons chez Mill ou chez Wittgenstein[7], ou pire encore chez Field, qui advient en totale rupture avec toute idée de mathématicité au sens des Grecs ?

> « All numbers, écrit Mill, must be numbers of something: there are no such things as numbers in the abstract. Ten must mean ten bodies, or ten sounds, or ten beatings of the pulse. But though numbers must be numbers of something, they maybe numbers of anything. Propositions, therefore, concerning numbers, have the remarquable peculiarity that they are propositions concerning all things whatsoever, all objects, all existences of every kind, known to our experience. »[8]

Personne ne peut nier aujourd'hui que les mathématiques, depuis leur naissance quelque part dans un point temporel indéterminé de l'histoire des civilisations et des cultures humaines, soient étroitement liées aux hommes en chair et en oset au monde réel tel qu'il se donne à eux dans l'expérience. « Leur développement n'a-t-il pas été suscité par des préoccupations d'ordre utilitaire inscrites en filigrane dans les termes mêmes qui désignent les premières mathématiques constituées : la géométrie (« mesure de la terre ») et le calcul (« caillou » en latin) ? »[9]. Mais l'entreprise physicaliste et empiriste radicale serait incapable de rendre compte d'une manière satisfaisante de toute cette complexité des rapports qui se sont tissés (et qui continuent à se tisser encore aujourd'hui) entre les mathématiques, la logique, les théories élaborées et l'expérience. Le défi philosophique majeur est de pouvoir expliciter cette complexité fondatrice de l'édifice de la science (un tissu inextricable de faits et de sens que nous ne pouvons hélas réparer que dans le mouvement et que de l'intérieur, dirait Quine) et de lui donner sa juste valeur sans néanmoins tomber dans des incohérences incompatibles avec une certaine idée de la rationalité, qui a les traits de l'universalité omniculturelle, les avantages du pragmatisme et l'éthique d'une quête désintéressée de la vérité.

L'une des options du physicalisme tel que je voudrais le définir ici consiste à représenter l'arrière-plan philosophique de ce courant de pensée qui réhabilite l'empirisme radical au sujet des mathématiques et considère que tout discours sur une réalité mathématique autonome se développant de manière indépendante de l'empirie, des besoins et des problèmes de la physique mathématique moderne, repose sur une série de réifications et d'idéalisations des opérations mathématiques (qui sont tirées par induction et approximation de l'expérience), et doit être, par conséquent, mis à plat.

[6] L'expression est à Lautman (1977), p. 23, lorsqu'il parle « d'un évanouissemnt progressif de la réalité mathématique. »

[7] Wittgenstein : *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Suhrkamp Verlag, Francfort, 1974, p. 356 : " Celui qui sait une proposition mathématique ne doit encore rien savoir. C'est-à-dire que la proposition mathématique ne doit fournir qe l'armature pour une description. »Cité par Bouveresse (1987), p.70.

[8] Mill (1973) p. 254-5.

[9]Boirel René : « Les applications des mathématiques », dans *Mathématiques*, Encyclopedie, p.156.

Dans ce sens, le projet antiplatoniste, trouvant sa place dans cette physicalisation poussée à son extrême, peut être identifié aussi comme une forme de naturalisme fort, au sens de la théorie causale de la connaissance et de la justification: Les platoniciens oublient souvent que l'esprit (d'autres diront le cerveau) qui invente et qui crée les mathématiques, n'est qu'une partie intégrante de la nature et que sans la présence du monde extérieur, aucune notion arithmétique ou géométrique n'aurait pu voir le jour. Mais les physicalistes oublient souvent aussi que les notions et les concepts mathématiques ne sont en vérité ni dans les choses ni dans le cerveau. Les mathématiques dépendent certes de la présence du monde extérieur, des choses de ce monde et des relations quantitatives entre elles, et surtout du cerveau humain, mais elles n'atteignent leur élan en tant que raisonnement créateur de modèles pour le réel et n'acheminent vers leur véritable essence qu'en elles-mêmes. Les mathématiques sont avant tout un langage, et c'est dans ce langage « construit et de convention »[10] et non pas dans un autre que s'exprime précisément la physique et formule ses lois.
Notons que par « physicalisation des mathématiques », j'entends ici la conception empiriste en philosophie qui défend les deux idées suivantes: (1) d'abord, l'origine des contenus des théories mathématiques n'est pas à chercher en dehors du réel, et par conséquent, des théories physiques, (2) et ensuite, le développement des mathématiques n'est pas à chercher en dehors de l'histoire des textes mathématiques et des problèmes scientifiques et physiques, et que, par conséquent, les aspects pures des mathématiques doivent répondre à des fonctions et à des tâches pratiques au sein de la science.
Le « physicalisme » est la doctrine qui s'oppose à toute idée d'un univers mathématique indépendant non seulement de l'esprit humain mais surtout de l'histoire des textes et des problèmes et découvertes physiques, et qui récuse, par conséquent, la possibilité même d'une forme de réalité attribuable aux « êtres » mathématiques, qui sont des « êtres de raison ». L'élément physique s'impose comme étant l'élément basique de la connaissance vraie et réussie du monde naturel, et l'abstraction mathématique vient au second plan, puisque les vérités issues d'elle sont des vérités qui, si elles n'adviennent pas par simple induction de l'expérience, sont des vérités purement conventionnelles (dans le sens que Quine attribue à Carnap dans *Truth by Convention*), ou réduites à de simples propositions verbales. Il n'est pas faux de dire que le physicalisme est, dans cette perspective, étroitement lié à l'empirisme radical des mathématiques tel que nous le voyons présenté dans les travaux de Mill, de Wittgenstein[11], de Kitcher, de Field et de bien d'autres. C'est une conception du discours mathématique qui s'oppose à la fois à Frege et à Kant (l'opposition entre ces deux est aussi vigoureuse), mais aussi aux thèses des formalistes comme Hilbert et des positivistes logiques. Les mathématiques viennent de l'expérience, ont des contenus empiriques, et ne s'identifient pas à un discours verbal de nature analytique « qui fausse l'esprit et dessèche le cœur », déconnecté de la réalité du monde et, plus que tout, de nos impressions sensorielles. D'abord, nous ne pouvons pas expliquer les fondements de notre connaissance mathématique en ayant préalablement pour point de commencement une quelconque philosophie première (une méta-physique : on retrouve ici l'attitude de Wittgenstein tournant le dos à toute

[10] Paty (1988), p. 320 : «Les mathématiques ne sont plus l'alphabet objectif du livre de l'Univers comme elles l'étaient pour Galilée, dans la tradition pythagoricienne. Elles sont construites et de convention : en témoignent et la diversité des directions de leur développement, et l'absence pour elles désormais de nécessité de se référer à aucun élément réel. »
[11] « Par ailleurs, même si Wittgenstein trouve irrecevable le point de vue empiriste, il lui arrive d'être tout proche de lui. Comment ne pas qualifier d'empirisme ou de béhaviorisme l'attitude selon laquelle la signification d'un concept est donnée par la pratique, par l'action, par son emploi ? » Espinoza Miguel, « Wittgenstein et l'essence des mathématiques », dans Bouveress-Quilliot Renée, éd (1995).

hiérarchie des langues et des métalangues) qui soit en mesure de transcender, dans un sens platonicien ou kantien, le domaine et les limites des sciences de la nature.

L'origine de toute connaissance, quel que soit son objet, ne peut être expliquées, dans des termes rationnels clairs, qu'au moyen des méthodes physiques elles-mêmes, et ne doivent, en aucun cas, précéder ces méthodes dans une sorte de structure apriorique de l'esprit, ou dans une axiomatique formelle, ou dans les traits d'une quelconque philosophie transcendantale, même à la Petitot[12], ayant pour finalité la mise en place des préconditions de toute pensée pure sur les sciences.

Cette épistémologie empirique radicale des mathématiques, intimement liée à un ancrage du savoir mathématique dans une genèse historique, et qui insiste plutôt sur les questions liées à la physique mathématique que sur des problèmes de pure nature axiomatique, semble aller à l'encontre des thèses que nous pouvons tirer d'un projet philosophique qui vise plutôt à redéployer la dimension créatriceau cœur même des parties les plus complexes des mathématiques appliquées, pour y dévoiler une forme de pensée créatrice constitutive du travail scientifique lui-même. Or, les deux méthodes, celle physico-empirique radicale (avec ses aspects lourdement historiques et pratiques) et celle philosophico-spéculative modérée (avec sa dimension ouvertement créatrice et rationnelle) peuvent s'associer au sein d'un même projet cohérent. Nous trouvons très probablement deux variantes de cette association réussie chez Quine, avec ses arguments d'indispensabilité, tirés d'une explication pragmatique de l'applicabilité, et chez le physicien et épistémologue français Michel Paty, concernant ses récentes recherches dans le domaine de la philosophie et l'histoire de la physique au XXème siècle, où nous voyons à quel point elles étaient influencées par Poincaré et Einstein, tous deux favorables, par-delà leurs aspects d'effectivité et leur capacité à véhiculer dans leur langage symbolique propre des informations tenues du réel, à l'intervention libre des choix humains aux côtés de l'expérience dans la détermination des concepts et dans l'élaboration des théories scientifiques.

En effet, et contrairement à la position du problème au sein d'un physicalisme strict et d'un empirisme rigoureux, qui va jusqu'à récuser l'existence même d'un domaine d'intelligiblité pure propre aux idéalités mathématiques, la question de l'applicabilité chez Quine et Paty va prendre sens dans un projet beaucoup plus profond sur le plan philosophique, malgré les postulats épistémologiques naturalistes de l'un et la prééminence du modèle physique quantique chez l'autre. Mais Quine et Paty auront l'avantage de poser le problème du contenu empirique des mathématiques et du contenu factuel et expérimental des théories par rapport à ce trait propre à leurs modèles qui est celui d'une applicabilité rapprochée des structures mathématiques aux phénomènes du monde réel, et de pointer par-là en direction de l'ouverture des mathématiques au monde comme étant l'essence même de son discours.

> « De même, écrit Paty, que l'on distingue la reflexion philosophique et l'activité scientifique, on distinguera le *Réel* que l'une comme l'autre visent, et la réalité des objets ou concepts, qui est toujours relative au processus cognitif, à l'être-théorique, qui les particularise. Cette réalité particulière est tributaire du Réel comme référence et fondement épistémologique de toute connaissance, mais elle ne lui est pas, même partiellement, superposable. L'objet pensé est supposé représenter un objet réel, procédant de ce Réel : mais, par là même nous le conceptualisons, nous savons que c'est une approximation. »[13]

[12] Jean Petitot défend un platonisme transcendantal ou dit négatif concernant les mathématiques.
[13] Paty (1988), p.381.

Par-delà son choix analytique qui place les mathématiques dans le domaine de l'apriori, Frege nous a enseigné que l'analyse philosophique de cette question nous oriente vers un horizon de pensée sur la Mathématique qui dépasse largement la simple perspective historique et empirique. En parfaite harmonie avec cette orientation, les travaux de Quine et de Paty au niveau de la théorie des ensembles et de leur place dans la science physique mathématisée classique ou quantique einsteinienne et post-einsteinienne, leur ont permis, sous un horizon philosophique qui récuse à la fois le transcendantalisme kantien et le physicalisme des empiristes que Quine qualifie de dogmatiques, de prouver que les fonctions et les opérations mathématiques ne peuvent pas être construites individuellement comme des généralisations à partir de l'expérience, ni analytiquement sans aucun recours à la réalité du monde. On s'aperçoit vite avec Quine et Paty, que la thèse d'une physicalisation rigoureuse et complète des méthodes d'investigation en mathématiques est une thèse difficile à défendre jusqu'au bout car elle montre incontestablement des incohérences insurmontables[14].

Nous savons comment les énoncés et les théories scientifiques peuvent, quel que soit leur degré de formalisme, de symbolicité et d'abstraction, acquérir des contenus et des significations empiriques à travers leurs conséquences observationnelles. Les assauts quinéens contre la distinction, chère aux empiristes logiques, entre les propositions analytiques et les propositions synthétiques, et sa conception« holiste » de la signification et de la connaissance avaient abouti au résultat épistémologique reconnu depuis bien longtemps: soumettre la connaissance mathématique au même standard d'évaluation et de justification que la connaissance physique, mais par rapport à un arrière-plan philosophique nouveau, dans lequel les rapports de la théorie à l'expérience deviennent beaucoup plus complexes. Là Quine introduit l'idée d'un schème conceptuel que Davidson qualifie de troisième dogme.

Parmi ceux qui s'opposent à Quine et à son empirisme réformé, nous pouvons sans doute classer Philip Kitcher[15], qui va jusqu'à utiliser« l'observation selon laquelle nous ne pouvons suivre les preuves longues et les vérifier[16], pour ainsi dire, d'un seul coup, comme raison pour affirmer que les mathématiques sont aussi faillibles ou empiriques que les sciences naturelles. »[17]

Or, du point de vue de Quine, la signification empirique propre aux mathématiques s'attache en vérité indirectement aux contenus de leurs énoncés qui sont appliqués dans les parties mathématisées des sciences empiriques en général. Pour Quine (et sans doute pour Wittgenstein), il y a un lien étroit entre dire ce que sont les nombres, par exemple, et leur application. Ce qui importe avec l'auteur du *Tractatus*, ce n'est pas de savoir si les énoncés mathématiques sont vrais parce qu'ils correspondent à une certaine réalité faite de 2, 3 etc., (si 2, 3, … existent), mais leur application et leur utilisation dans notre description de la réalité : c'est à partir de là que tout se décide. Mais le constructivisme « finitiste » de Wittgenstein qui fait que la vérité d'une proposition mathématique se confond avec sa méthode de vérification finie, va l'empêcher d'aller plus loin, c'est-à-dire jusqu'à considérer l'applicabilité des mathématiques comme une source d'admissibilité ontologique ou de dire que les mathématiques appliquées sont vraies.

[14] Voir Stewart Shapiro (2000), p. 92-102, où il s'étonne de voir Mill dire, malgré son projet empirique radical d'induire les lois logiques et mathématiques de l'expérience, que la Géométrie concerne les idéalisations des possibilités de construction, et Shapiro se pose la question de savoir comment un empiriste peut-il comprendre et rendre compte de ces deux notions de « possibilité » et de « construction » ?

[15] Kitcher (1983)

[16] Comme celles qui se rapportent au théorème de Fermat.

[17] Espinoza Miguel (1995), p. 295.

C'est le cas avec Quine, où le lien étroit entre mathématiques, vérité et application va donner lieu chez lui à des arguments (étranges au premier abord) qui plaident en faveur de la thèse du réalisme mathématique (les arguments d'indispensabilité[18]). L'existence de 2, 3, etc. devient, contrairement à Carnap et en un certain sens à Wittgenstein (l'existence des nombres est un faux problème à leurs yeux), un élément interne à la vérité des énoncés mathématiques appliqués et utilisés dans une description vraie (et surtout réussie) de la réalité. Quine réhabilite les questions ontologiques en intégrant la théorie de la quantification non seulement dans la logique mais aussi dans les mathématiques (la théorie des ensembles).
Nous pouvons dire dès lors que l'explication quinéenne de l'origine quasi-empirique de notre connaissance des phénomènes du monde physique constitue un progrès important par rapport à l'explication réductionniste de l'empirisme contenu dans le projet physicaliste. Bien que Quine apparaisse parfois comme un physicaliste convaincu dans le sens où il semble ériger le mode de connaissance physique en un modèle épistémologique premier qui s'impose à tous et partout, (l'ontologie à laquelle il adhère est celle de la science physique faite d'objets physiques et des classes nécessaires aux mathématiques), il ne défend pas contrairement à ce que certains sont en mesure de le croire, une philosophie physicaliste des mathématiques. Même s'il laisse ouverte la possibilité d'une physicalisation des états mentaux, par exemple, nous ne trouvons dans aucun endroit de ses écrits une telle idée appliquée aux mathématiques. Pour lui, les ensembles sont bel et bien des objets abstraits, des universaux, et le type de réalisme pragmatique qu'il défend repose sur l'admission des entités mathématiques en tant qu'objets abstraits, et non pas en tant qu'objets physiques, capables d'être perçus (Gödel/Maddy) ou semi-physiques susceptibles de faire l'objet d'une intuition intellectuelle.
Quine récuse la thèse empiriste d'une perception directe des objets du discours scientifique, et, pour lui, notre accès à l'information portant sur eux ne provient pas de l'expérience comme d'une source ultime pour valider et vérifier un fragment de connaissance ou de théorie. Certains philosophes contemporains come Maddy, par exemple, sont allés jusqu'à dire que nous percevons les objets mathématiques, et ils existent dans la réalité en tant qu'ensembles d'éléments. Quine se démarque nettement de ce point de vue, héritier de la thèse de Gödel, pour deux raisons essentielles: d'abord la perception directe ne joue, dans l'élaboration des théories scientifiques, qu'un rôle limité, c'est-à-dire, uniquement dans le cas des énoncés d'observation, ensuite, la science (même mathématique) n'est pas totalement coupée du sens commun et du savoir qui est déjà disponible dans la connaissance ordinaire. Un fragment de la science n'est pas le résultat d'une action partielle ou la conséquence directe d'une intelligence individuelle, mais principalement une activité sociale et publique dans laquelle la structure de la langue et du schème conceptuel jouent un rôle aussi capital que le rôle donné à l'expérience. Notre contact avec les objets et notre accès aux connaissances et aux croyances scientifiques en général (mathématiques aussi bien que non mathématiques) ne présupposent en vérité aucune notion de perception directe. Malgré le néo-empirisme (d'autres diront le quasi-empirisme ou l'empirisme tout court) de

[18] L'énoncé des arguments paraphrasé par Espinoza, ibid p. 305 : «Si la théorie physique est littéralement vraie, et si elle contient une partie mathématique inéliminable, il s'ensuit que les entités mathématiques présupposées son réelles. La vérité implique l'existence ». Pour Peressini (1997), ces arguments ont eu de l'effet non seulement sur les réalistes comme Maddy et Resnick, mais sur les anti-réalistes aussi tel que Field qui va jusqu'à consacrer tout un livre (Field 1980) non pas pour s'interroger sur le fait que les arguments d'indispensabilité impliquent le réalisme, mais pour démontrer comment la thèse de l'indispensabilité dans les sciences est fausse.

Quine, et l'ancrage de sa pensée dans une ligne de tradition bien humienne, la notion de perception en général n'a, contrairement à Hume, qu'un rôle réduit au minimum.
Du point de vue de l'épistémologie quinéenne, la connaissance mathématique n'est ni réductible à l'expérience dans le sens du physicalisme selon la définition que je lui ai donné ici, ni à la logique: la théorie des ensembles avec son prédicat d'appartenance n'est pas incluse dans le champ du discours logique. Quine est relativement d'accord sur le principe général de la conception physicaliste en philosophie des mathématiques: nous n'avons pas besoin d'une source de connaissance autre que l'expérience physique pour expliquer l'origine des mathématiques. D'ailleurs, c'est lui qui a appelé dès les années 1960, en parallèle avec Benacerraf, à une « naturalisation » des mathématiques et de leur épistémologie. Or, il serait intéressant de savoir comment s'articule, chez lui, l'opposition naturalisation/physicalisation (au sens empiriste) dans son rapport avec les mathématiques en tant que domaine autonome ? Nous trouvons la réponse sans doute dans le principe du holisme épistémologique qui a marqué, depuis les années 1930, ses différences avec l'atomisme logique de Russell et de Wittgenstein et l'empirisme logique de Carnap. En effet, nous ne pouvons assigner aux mathématiques une origine dans le champ possible de l'expérience sensible qu'à condition de refondre la compréhension traditionnelle des rapports entre expérience, connaissance et langage dans le projet « holiste ». C'est à la réalisation d'une telle tâche que Quine s'est attelé dans « Les deux dogmes de l'empirisme »[19], « Truth by Convention »[20] et « La nature de la connaissance naturelle».[21]
Paradoxalement, l'explication « empiriste » non dogmatique que Quine nous propose devient compatible avec une forme pragmatique et rationnelle de réalisme mathématique. Quine arrive à admettre cette forme de réalisme en vertu d'une utilisation pragmatique des arguments d'indispensabilité. L'une des objections adressées à son réalisme figure le fait de ne considérer que les parties appliquées des mathématiques et de négliger leurs parties pures[22] , c'est-à-dire de mettre au premier plan l'idée de mathématisation et du rôle nécessaire des mathématiques dans la modélisation de la physique[23]. En effet, si nous considérons les mathématiques uniquement par rapport au rôle qu'elles jouent dans les sciences et uniquement en vertu de leur applicabilité dans l'étude des problèmes physiques, comme le fait Quine, nous risquons de faire dissoudre totalement leur propre développement dans celui des sciences de la nature. (C'est ce que Lautman appelle l'évanouissement de la réalité mathématique).
Il est certain que Quine ne met pas en cause le statut des mathématiques en tant que science autonome, même s'il insiste souvent sur leur statut de sciences appliquées. Nous voyons à quel point le clivage *appliqué/pur* est fondamental ici. Pour lui, les mathématiques ont un domaine et un sujet d'étude propres, distincts de ceux de la physique et des autres sciences, et elles se développent par rapport à des exigences internes à la méthode mathématique elle-même, et non pas uniquement au contact de

[19] Cet article a été publié pour la première fois en 1951 dans la revue *Philosophical Review*, Janvier 1951, 60,1, pp. 20-43. Repris dans Quine (1953).
[20] Publié pour la première fois en 1936 dans *Philosophical Essays for A.N.Whitehead,* O.H.Lee, ed., New York : Longmans, pp. 90-124. Il a été repris dans Quine (1966a).
[21] Publié en 1975 dans *Mind & Language : Wolfsom College Lectures 1974,* Samuel Guttenplan ed., Oxford University Press, London.
[22] C'est à Maddy que revient le mérite d'avoir formulé cette objection aux arguments d'indispensabilité tenus par Quine. Maddy(1990).
[23] Voir l'excéllent exposé de Kremer-Marietti & Dhombres (2006) sur modélisation et modèles en physique.

problèmes extra-mathématiques. Il est sûr que, de son point de vue, les mathématiques et la physique entretiennent des relations très étroites, de telle manière que l'application de leurs modèles dans l'étude des phénomènes naturels s'est montrée d'une extraordinaire efficacité et d'une grande utilité non seulement pour les sciences mais aussi pour la recherche mathématique elle-même. Mais ce succès grandissant et cette place privilégiée des mathématiques dans la pratique scientifique, surtout au niveau de la prédiction, n'exclut pas le fait que Quine tient pour admissible l'existence d'un stock de vérités mathématiques qui soit composé des vérités pures n'étant pas réductibles entièrement à leurs applications. Ce clivage *appliqué/pur* lui permet de se soustraire au piège du constructivisme qui réduit la vérité de la proposition à son processus de démonstration et à sa méthode de vérification, mais aussi de nous mettre en garde contre le fait de considérer les mathématiques comme un raisonnement dans l'absolu sur des abstractions pures et déconnectées de la réalité. Le constructivisme met à plat l'objectivité des mathématiques: Ces dernières passent de l'état d'une science à l'état d'un simple outil. Corrélativement, il rejette le choix qui consiste à traiter ces vérités en termes de possibilités et d'impossibilités logiques (ce qui semble être la position de Wittgenstein), ou en termes de vérités nécessaires et apriori. Or, même considérées du point de vue de leur nature de pures vérités abstraites et idéales, les vérités mathématiques se prêtent plus facilement à des applications très efficaces dans les sciences de la nature. Il n'y a pas de place ici pour un problème de l'applicabilité tel qu'il peut se poser chez les formalistes, les logicistes ou chez les plus gödeliens des platonistes, et qui se traduit dans ces termes: Comment expliquer ce phénomène énigmatique, au premier abord, qui concerne l'application des formes mathématiques pures aux objets empiriques ordinaires ?

L'applicabilité chez Quine n'a rien d'énigmatique ni de surprenant. Elle gênerait plutôt un antiréaliste néo-nominaliste de l'espèce de Field, car elle prouverait, contre toute sa théorie, l'inéliminabilité des mathématiques de certaines parties de la science physique. Tout le sens de sa philosophie consiste à démontrer comment les mathématiques apliquées sont en vérité « conservatives » par rapport aux théories physiques, alors que les mathématiques pures sont réduites au simple stade de fictions.

Il n'est pas contestable que le trait d'applicabilité propre aux mathématiques et le clivage *appliqué/pur* doivent être pris au sérieux dans toute réponse possible à la question qui porte surla nature des objets mathématiques aboutissant au dilemme de leur existence. C'est ainsi que l'adhésion à l'explication « fictionnaliste » d'une théorie ou d'une partie des mathématiques doit être accompagnée impérativement par le fait de montrer comment cette théorie ou cette partie est « dispensable » et non utile dans l'application. Partant de la thèse antiplatoniste qui dit que les objets mathématiques abstraits n'existent pas, la réponse fictionnaliste à la question de la nature des nombres et des autres entités mathématiques nécessite donc une théorie du caractère non utile des théories mathématiques dans notre connaissance physique du monde. Les mathématiques n'ont pas besoin, du point de vue du fictionnaliste, d'être vraies pour être utiles, même si on applique à leurs énoncés un concept antiréaliste de la vérité. Cette attitude va à l'encontre des idées de Quine et de Paty. Tous deux sont d'accord sur le fait épistémologique suivant: les vérités mathématiques ne sont pas des fictions, elles ne correspondent à aucune réalité physique non plus. Ce que Field cherche à éviter, c'est de mettre au point une conception des relations entre mathématiques et physique susceptible d'impliquer des conclusions fausses sur les objets observables. Cette intention va l'obliger à chasser la notion de consistance logique de tout son programme et même de son vocabulaire scientifique. Réduire les mathématiques à des fictions lui donne la clé de la solution. Field n'est donc pas loin d'une conception néo-nominaliste proche des idées maitresses du cercle de Vienne, où nous voyons comment les théories mathématiques sont vidées de tout contenu ontologique et de tout rapport aux faits et à la réalité. La seule réalité qui existe vraiment c'est celle que la science physique nous dévoile, et les mathématiques ne sont qu'un moyen pour l'exprimer en vertu de leur essence logique.

Il est sans doute vrai que la question de l'applicabilité est une question qui met dans l'embarras les nominalistes les mieux armés conceptuellement et logiquement comme Field. Notons à l'occasion que l'approche nominaliste se montre toujours tributaire d'un emploi non standard de la logique (ou plutôt des logiques). Paradoxalement, et malgré ses ressources logiques extrêmement riches et conceptuellement puissantes, ce type d'approche s'avère être incapable de nous faire bénéficier, rationnellement, d'une solution philosophique adéquate au problème de l'applicabilité.

En effet, le défi majeur qui attend les philosophes nominalistes dotés d'un excédent logique débordant les outils de l'analyse standard, qui les rend irrévocablement défavorables à toute forme de réalisme mathématique, surtout dans son volet ontologique, consiste à essayer de résoudre ce problème, dans les limites de ce qu'ils peuvent, en adaptantà leurs nouveaux systèmes les propriétés utiles qui dérivent de l'applicabilité. En posant l'applicabilité comme intrinsèque aux théories mathématiques elles-mêmes, tous ces philosophes adhèrent implicitement ou explicitement à une forme de réalisme scientifique, et par conséquent mathématique: les affirmations mathématiques sont appliquées à des phénomènes du mondereéel et sont aussi informatives et scientifiques que tout le reste, et c'est de là qu'elles sont confirmées.

Le physicalisme néo-nominaliste de Field a pour conséquence non seulement l'élimination des nombres, des fonctions, et de tous les objets mathématiques abstraits en général, mais aussi de mettre en doute tout statut de science authentique appliqué au champ des idéalités mathématiques: les mathématiques deviennent le simple organon de la physique, puisque les assertions mathématiques ne sont que conservatives par rapport à elle, mais un organon qui ne s'impose à nous par aucune nécessité propre à son action et à son emploi. Avec cette pensée par détours, instrumentaliste et néo-logiciste à la fois (tout ce qu'il y a dans les mathématiques, c'est de la logique), Field aboutit à sa fameuse thèse sur la « conservativité ». Cette propriété « métamathématique » qui ferait bouger Witgenstein dans sa tombe, n'est en vérité qu'un cas extrême de la notion formelle de consistance logique. Elle est introduite dans le seul but de garantir l'autonomie conceptuelle et ontologique de chaque démarche théorique en physique par rapport aux services que les mathématiques sont capables de lui rendre, et qui lui sont en vérité d'une utilité inéliminable car elle rentre dans la sructure même de leur expression.

> « La théorie physique, écrit Paty, en effet se fonde non seulement sur une mathématisation de ses concepts, mais, d'une manière plus globale, sur une substitution : elle remplace les déterminations complexes et encore inconnues du réel qui s'offre dans l'observation expérimentale par un ensemble de principes, sur le fond desquels la théorie déroulera ses enchainements. »[24]

Aveuglé par un instrumentalisme logiciste poussé à son extrême, Field n'a pas compris que les mathématiques sont aussi un outil d'une pensée « sûre de son langage » (Bachelard) et possédant « une force singulière » (Paty) et non pas simplement un outil pour traduire ou exprimer les structures physiques. En éliminant cet outil, il croit

[24] Paty (1988) p. 335.

pouvoir réussir à relever ce défi qui consiste à élaborer une science physique sans les mathématiques en évitant de retomber à nouveau dans le marais platoniste : s'attaquer directement aux conséquences réalistes de l'applicabilité en procédant à sa nominalisation. Mais son échec, d'après le constat de tous, est flagrant.

Revenons maintenant à l'analyse du point de vue de Paty pour constater que la question de l'applicabilité des mathématiques, une fois qu'elle a été bien formulée et posée, est pour lui au cœur même de tout discours ayant pour sujet d'étude le mode de constitution de l'objectivité scientifique elle-même. Suivant en cela Einstein, Paty traite les mathématiques comme un pur produit de la pensée humaine qui garde, par conséquent, une certaine indépendance par rapport à l'expérience (et à la science physique). Le problème qu'il veut résoudre se pose dans ces termes: Quelle est la nature du rapport entre le réel que nous décrivons par la science physique et la caractérisation symbolique et la conceptualisation de ce réel [25] ?

Le problème des rapports entre symbolisme mathématique et monde physique est posé dans une perspective philosophique plus large qui concerne la symbolicité et la conceptualisation d'une manière générale et les multiples facettes de leur rapport au réel. La question de l'applicabilité nous ouvre sur un problème philosophique essentiel qui est celui du rapport de la pensée humaine (symbolique et conceptuelle) au réel physique. Cette question qui témoigne d'un rapport de construction que les mathématiques entretiennent avec la réalité moyennant un travail formel qui dégage et unifie ses structures physiques, renvoie à celle de l'intelligibilité de l'univers, objet de la pensée conceptuelle et symbolique humaine qui sont les traits intrinsèques d'une rationalité critique à laquelle adhère profondément Paty.

« On doit certes constater que, pour le dire avec Lautman, faisant écho à Einstein et àla Relativité Générale, 'cet accord entre géométrie et physique est la preuve de l'intelligibilité de l'univers'»[26]

L'un des problèmes que veut résoudre Paty consiste à expliquer le rapport intrinsèque entre « modélisation » mathématique et « prédictivité » physique sans néanmoins opter pour une « nominalisation » de la physique selon le modèle construit et proposé par Field, ni accepter le formalisme qui réduit les mathématiques à un simple jeu formel sur des signes, ni tomber dans le piège de la solution réaliste quineénne qui donne aux référents abstraits des théories mathématiques utilisées dans la physique le même statut ontologique que les particules cachées de la physique microscopique, ni non plus accepter une physicalisation rigoureuse des vérités mathématiques du type que proposent les empiristes. En vérité, le vrai problème que pose Paty est celui de la mathématisation et de son rôle dans la physique, particulièrement dans celle des particules élémentaires: comment doit-on comprendre la nature des relations de construction et d'interprétation entre les mathématiques et les théories physiques sans les dramatiser ou les idéaliser ou les traiter autrement qu'à leur juste valeur ?

Dans une direction inverse à celle de Field, qui pose la possibilité de construire non mathématiquement la théorie physique (y compris celle des quanta), Paty s'interroge sur les méthodes de théorisation selon lesquelles s'effectue la construction mathématique de

[25] Pour Paty, la question du rapport pensée/réel constitue le soubassement de la question du rapport mathématiques/physique. Paty (1988), p. 319. Le type de rationalisme qu'il cherche à mettre au jour est cependant différent de celui de D'Alembert par exemple. Là où D'Alember utilise le mot raison Paty utilise plutôt celui de pensée : « (D'Alembert) affirme que leur fondement (les lois de la physique) est la raison ; nous disons aujourd'hui qu'il est dans la pensée. (Et D'Alembert inscrit la raison au cœur même du réel, résolvant le problème par identification. Pour nous, il y a distance, pour ne pas dire béance : la distance de la pensée au réel.) » Paty (1988), p. 337.

[26] Paty (1988), p. 323.

la théorie physique. La philosophie de Paty est ainsi une réfutation de tout le programme anti-platoniste de Field, puisqu'elle donne aux mathématiques le statut d'un outil qui construit la théorie physique et non pas seulement d'un langage qui la traduit. Or, cela ne le rend pas platoniste pour autant. Contrairement à Quine, l'applicabilité chez Paty ne conduit à aucune forme de platonisme, même modérée. En effet, ce qui intéresse Paty, et, paradoxalement, selon une ligne de tradition bien quinéenne, c'est le caractère pratique des mathématiques, la question de leur ouverture au réel (objet de l'expérience)et plus particulièrement la question de la mathématisation. Cette ouverture au réel est traitée dans son évolution historique : entre son expression chez Galilée, ou au 18ème siècle, ou dans la physique des quanta moderne, les rapports entre mathématique et physique ont profondément changé. Il s'agit plutôt aujourd'hui de chercher, dans un esprit tout autre que celui émanant d'un pythagorisme essentiel que nous trouvons chez Galilée même, à élaborer « des concepts physiques pensés mathématiquement » et à les « substituer (en tant que concepts « abstraits-construits ») aux déterminations du réel donné dans l'expérience. »[27] Mais Paty veut à tout prix éviter qu'une analyse de la nature de la mathématisation n'aboutisse à une solution réaliste sur le plan de l'existence des entités mathématiques.

> « Il n'est certes pas évident, écrit-il, que le nombre soit « l'essence » de la réalité matérielle ; tout au plus pourrait-il s'agir d'une « essence » de l'approche abstraite de la pensée conceptuelle. »[28]

Contrairement à un platoniste comme Quine ou à un pythagoricien comme d'Espagnat, les questions qui relèvent de l'ontologie des mathématiques sont reléguées au second plan, et pour mieux approfondir et éclaircir la question de la nature de la mathématisation, Paty donne la priorité à ce qu'il appelle « la similitude des conditions formelles de l'approche » que la « plurivalence » mathématique vise avant tout à traduire[29].

Mais Paty ne va pas jusqu'à nier la possibilité même de l'existence d'un stock de vérités mathématiques pures, ni refuser aux théories mathématiques elles-mêmes tout contenu autonome[30] par rapport à la physique. « Considérées en elles-mêmes, écrit-il, les mathématiques ne nous informent en rien sur le réel. » [31] Mais il faut bien se rendre compte que ce contenu reste formel et doit se donner à nous par le truchement des symboles.Si les mathématiques sont à la base une pure création de l'esprit et n'ont, par conséquent, aucune portée référentielle dans le monde physique au-delà de leur application dans les théories qui portent sur lui, nous ne pouvons pas pour autant nier qu'il existe des vérités mathématiques, en tant qu'elles sont relatives aux axiomes et aux définitions choisis. Et qu'en est-t-il, dès lors, des objets mathématiques eux-mêmes présupposés, selon le critère de Quine, par cette notion de vérité ?

Pour Paty, comme d'ailleurs pour un grand nombre de philosophes modernes, il y a une vérité et une objectivité mathématiques sans objets:

> « La vérité mathématique, écrit-il, persiste encore si la notion d'objet mathématique est dissoute en pure opérationnalité dans une conception de type opératoire selon laquelle il n'y aurait pas d'objets mathématiques mais seulement

[27] Ibid p. 321.
[28] Ibid.
[29] Ibid.
[30] « On ne débattra pas ici du problème de l'autonomie des mathématiques et de la physique, aujourd'hui évidente, mais qui ne l'était pas du tout au 18 ème siècle. » Paty (1988), note 1 p. 350.
[31] Ibid, p. 322.

> des opérations du raisonnement mathématique….ce qui n'empêche pas de concevoir une sorte de « réalité mathématique » comme soubassement de la consistance des propositions mathématiques. »[32]

L'une des idées originales dans le projet philosophique de Paty est celle qui démontre comment les mathématiques ne sont dites ontologiquement vides que parce qu'elles s'appliquent aux phénomènes du monde physique :

« Le contenu, écrit-il, des propositions mathématiques est vide par rapport aux contenus physiques possibles. »[33]
« La désontologisation des mathématiques, ajoute-t-il, a rendu possible une nouvelle conception des rapports de celles-ci à la nature. Les mathématiques ne correspondent plus à une représentation globale et idéale, mais sont utilisées dans (ou appliquées à) l'établissement des lois et des théories physiques … »[34]

Le dépassement de l'instrumentalisme des néo-nominalistes, comme Field, qui tiennent les mathématiques pour de simples outils au service des autres sciences, s'il a effectivement lieu, va permettre à Paty de tenir la mathématisation de la physique pour une occurrence essentielle afin de trancher le débat sur la nature des théories mathématiques, et sur leur rapport au monde réel via leur place dans la physique. « Les mathématiques et la physique, insiste-t-il, ont un lien de constitution, d'ailleurs réciproque. »[35]En tout état de cause, si intelligibilité il y a en mathématiques, c'est sans doute une intelligibilité pour ainsi dire pratique. On est tout de suite non seulement en dehors de l'instrumentalisme, mais aussi directement opposé au type d'intelligibilité idéale (que Paty identifie à l'analogie à des formes pures) propre au platonisme.
Paty est d'accord avec les formalistes lorsqu'ils tiennent la consistance comme suffisante, mais n'accepte pas de réduire le contenu des mathématiques à un simple jeu formel, car, comme il le dit lui-même, « ce que confèrent les mathématiques en certitude aux calculs théoriques de la physique tient directement à leur valeur de vérité. »Même s'il rejette avec les formalistes le caractère strictement nécessaire et idéal du contenu mathématique, il est, par contre, d'accord avec les réalistes en pensant que leur valeur pour la vérité doit être prise en compte. Ceci ne veut pas dire que la vérité (et par conséquent la certitude acquise par la physique au moyen de sa mathématisation) dans ce cas précis renvoie à des référents abstraits qui existent idéalisés quelque part en soi: cette vérité n'est pas à être considérée en dehors du contexte des axiomes choisis, et qui n'est pas nécessairement une vérité de pure logique. Comme Quine, Paty n'adhère pas au clivage que des philosophes tels que Hume, Kantet Carnap ont cru installer au cœur même de la théorie de la connaissance, entre les propositions vraies en vertu de la signification des mots, et dans ce cas, elle ne donnent aucune information sur le réel, et celles qui sont vraies en vertu de l'état du monde, et dans ce cas, elles ne donnent aucune information sur le langage logique de la théorie élaborée. Comme Quine aussi, Paty rejette aussi la conception de Mill qui donne aux mathématiques un contenu empirique direct, et qui attribut, par conséquent, au discours mathématique un accès direct au réel.

---

[32] Paty(1993), p.13-14.
[33] Paty (1993), p. 16.
[34]Ibid.
[35] Idem p. 322

> « Toutefois ce Réel, écrit Paty, objet ultime de la science dans son unité qu'elle propose à l'horizon de sa démarche, ne se confond pas avec l'ensemble des objets que les sciences particulières nous décrivent au travers de leurs représentations. »[36]

Il y a souvent une sorte d'interpénétration entre les données de l'expérience et les significations du langage symbolique dans l'élaboration des théories scientifiques et dans la fixation de leur objectivité. Paty défend un réalisme rationnel et critique, mais il ne va pas jusqu'à soutenir la thèse de Quine selon laquelle la vérité précède l'existence, à savoir que l'existence de l'objet mathématique est une conséquence de la vérité de l'énoncé physique qui le contient. Sur ce point, Paty est plutôt russellien : l'existence précède la vérité, mais la réalité de l'existence doit se donner à nous avant tout en tant que concept. Faut-il d'abord faire attention sur la manière avec laquelle nous devons comprendre les idées de Quine dans le domaine de l'ontologie, qu'il ne faut jamais séparer de son pragmatisme, car chez lui l'être n'est jamais une activité analysable en termes d'essence et de nature.
En effet, les entités physiques cachées ou non prédites par les théories, correspondent à des phénomènes bien réels qui sont de nature physique, même si elles sont exprimées d'une façon pour ainsi dire « indispensabiliste » dans le formalisme des mathématiques.
Même si la mathématisation joue un rôle fondamental dans la prédiction en physique, cette dernière ne serait pas l'unique conséquence d'un raisonnement déductif formalisé, mais l'expression d'un contenu physique bien réel. L'existence des entités comme un prédicat propre à la prédictivité physique n'est pas une ontologisation d'une déduction qui serait de l'ordre des réifications utiles à la science (le mythe du schème conceptuel prôné par Quine), mais bien l'expression d'un ordre de relations réelles proprement physiques. Les mathématiques sont dans ce sens une interprétation de quelque chose qui dépasse leur cadre, de quelque chose qui s'impose par sa nécessité, et le fait de voir dans la prédiction une source d'admissibilité ontologique pour des entités abstraites inaperçues serait une erreur. Certes, les mathématiques contribuent, de par un travail hautement formalisé, à révéler des relations dans la nature età les interpréter, mais tout ce travail a comme référence ultime les propriétés de la réalité physique elle-même et non pas les propriétés d'un paradis platonicien. Bien qu'il soit un platoniste convaincu au sujet des classes, indispensables au travail des mathématiciens, et que son platonisme advient avant tout comme une critique de toute combinaison des modalités logiques et de la quantification, Quine ne peut que consentir.

Références bibliographiques

Azzouni Jody (1997), "Applied Mathematics, Existential Comitment and the Quine-Putnam Indispensability Thesis", dans *Philosophia Mathematica* (1997), p.193, 209.
Boirel (1969), "Les applications des mathématiques" dans*Les Mathématiques*,Edition Retz, Collection 'Les encyclopédies du savoir moderne', 1975.
Bouveresse Jacques (1987), *La force de la règle*, Paris, Éd. de Minuit.
Bouveresse-Quilliot Renée ed. (1995), *Visages de Wittgenstein*, Beauschenes.
Dahan-Dalmedico Amy (1987), « Réalité physique et objets mathématiques chez Fourier », dans *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, Jean Dhombres ed N° 20-1987.

[36] Paty (1988), p. 365.

Espinoza Miguel (1995) : « Wittgenstein et l'essence des mathématiques », dans Bouveresse-Quilliot (1995) p. 293- 307.
Guttenplan Samuel (1975): *Mind & Language*, Oxford University Press, London.
Irvine, A.D, Eds (1990):*Physicalism in Mathematics,* Kluwer Academic Publishers.
Kitcher Philip (1983): *The Nature of Mathematical Knowledge,* Oxford, Oxford University Press.
Kremer-Marietti Angèle & Dhombres Jean (2006), *L'épistémologie: état des lieux et positions*, Paris, Ellipses.
Laisant Charles-Ange (1907), *La Mathématique. Philosophie. Enseignement*. Gauthier-Villars, Paris 1907.
Lautman Pierre (1977), *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Paris, Union générale d'edition.
Maddy, Penelope "Physicalistic Platonism", dans Irvine, A.D. ed: Physicalim in *Mathematics,* pp. 260-289.
Mill J. S (1973): *A System of Logic*: The Collected Works of John Stewart Mill, Vol. 7, ed. J. M. Robson, Toronto, Univrsity of Toronto Press.
Oliveri Gianluigi (1997) "Criticism and Growth of Mathematical Knowledge", dans *Philosophia Mathematica* 1997, p. 228-249.
Patras Frédéric (2001), *La pensée mathématique contemporaine,* Paris, PUF.
Paty Michel (1988) *La matière dérobée*, Editions des Archives Contemporaines.
« La création scientifique selon Poincaré et Einstein », dans M.Serfati ed : *La recherche de la vérité*, ACL-Les Éd du Kangourou.
________(1990) « Interprétation et construction dans le rapport des mathématiques à la physique », *L'Enseignement philosophique*, Janvier-Février, pp. 73-89.
________(1993) La conférence donnée au XIème Colloque International :« Le statut d'existence des entités physiques cachées », Association Ferdinand Gonseth, Institut de la Méthode, Bienne-Biel Suisse, 11-12 Juin.
_______(2003) *La physique du XXe siècle*, EDP Sciences.
________(2005) «Des fondements vers l'avant. Sur la rationalité des mathématiques et des sciences formalisés », contribution au Colloque international « Aperçus philosophiques en logique et en mathématiques. Histoire et actualité des théories sémantiques et syntaxiques alternatives », Nancy 30 sept- 4 oct 2002, publiée dans *Philosophia scientiae*, 9 cahier 2, 2005, 109-130.
Maddy Penelope (1990), *Naturalism in Mathematics*, Oxford, Oxford University Press.
_______(2008),"How Applied Mathematics Became Pure", *The Review of Symbolic Logic*, Volume 1, Numéro 1, Juin 2008, p.16-41.
Peressini Anthony (1997), "Troubles with Indispensability: Applying Pure Mathematis in Physical Theory", dans *Philosophia Mathematica* (1997), p. 210. 227.
Philosophia Mathematica (1997)**,** Numéro spécial sur le thème de l'indispensabilité, Vol 5, Octobre 1997.
Quine Willard Orman (1948), "On What There is", réimprimé dans Quine (1980), p. 1-19.
____(1953), *From a Logical Point of View,* 1 ère edition, Harper Torchbooks New Yok and Evanston, IL. Traduit en français sous la direction de S. Laugier, Paris, Vrin 2003.
____(1958), *Methods of Logic*, Routledge & Keagan Paul, London.
____(1960a), " Carnap and logical Truth", publié dans Quine (1976), pp. 107-132.
____(1960b), *Word and Object*, MIT Press, Cambridge, MA, and London. Traduit par J. Dopp et P. Gochet,avant-propos de P. Gochet, Paris, Flammarion 1999.
____(1966a),*The Ways of paradox and Other Essays*, New York : Random House
____(1966b), *Elementary Logic*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press .

____(1969), *Set Theory and Its logic*. Cambridge, Mass. : Harvard University Press
____(1970), *Philosophy of Logic*.Prentice-Hall, INC, London.
____(1973), *The Roots of Reference*, La Salle: Open Court.
____(1974), « First General discussion session », *Synthese* 27pp. 481-508
____(1975), " The Nature of natural Knowledge", dans Guttenplan éditeur (1975).
____(1977), *Ontological Relativity And Other Essays*. Columbia University Press, New York 1969. Traduction française : *Relativité de l'ontologie et autres essais*. J. Largeault, Aubier-Montaigne, Paris 1977.
_____(1978), « Success and limits of mathematization », publié dans Quine (1981), pp 148-155.
_____(1980), *From a logical Point of View*, deuxième édition. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
____(1981), *Theories and Things*, Belknap Press/ Harvard University Press, Cambridge, MA and London.
____(1984a), « Relativism and absolutisme », *The Monist* , 67. p. 293-295.
____(1984b), « Critical Review ofParsons's Mathematics in *Philosophy* », *Journal of Philosophy*, 81,1984, pp. 783-794.
____(1991) « Immanence and Validity », *Dialectica*, Vol 45, N° 2-3 p. 219-230.
____(1994), « Promoting Extensionality », *Synthese* 98/, pp.143-151.
____(1995), « Naturalism; Or, Living within one's means », *Dialectica* VOL 49. N
Resnik Michael (1990), "Between mathematics and physics", *PSA*, Vol. 2, pp. 369-378.
Shapiro Stewart (2000**):** *Thinking about Mathematics*, Oxford University Press.
Steiner Mark (1995): "The Applicabilities of Mathematics", *Philosophia Mathematica*, 3/3, p.129-156.
_______(1997): *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Cambridge, Harvard University Press.
Wittgenstein Ludwig (1986), *Tractatus logico-philosophicus*, suivi des *Investigations philosophiques*, TEL, Gallimard.