Hamdi MLIKA

Mlika_hamdi@yahoo.fr

L'objectivation fidèle de l'activité de la raison:

Le nombre comme objet logique

Il s'agit ici de revenir sur une citation de Jean Largeault dans son grand et magnifique ouvrage (500 pages) intitulé : *Logique et philosophie chez Frege*, où il avait écrit la phrase suivante: " Les énoncés de la logique et de l'arithmétique sont l'objectivation fidèle de l'activité de notre raison.", et essayer de l'analyser. Je pense que cette analyse porte en germe la motivation principale de tout le projet logiciste de Frege : c'est-à-dire chercher à fonder l'objectivité de la mathématique sur des bases purement rationnelles et strictement analytiques sans recours à aucune intuition. Cette union sacrée entre logique et mathématiques dans le cas précis de la définition du nombre exprimée philosophiquement dans le logicisme n'est en vérité que la réalisation d'un idéal de rationalité analytique, capable aux yeux de Frege de mettre au point les termes de l'objectivité logique des énoncés arithmétiques annoncée dès 1979 dans l'Idéographie. Ce que je dis n'enlève rien du caractère problématique de ce projet dit logiciste surtout dans sa version russellienne. Russell a la grâce d'être à la fois celui qui introduit le projet de Frege dans l'univers philosophique européen, mais celui aussi qui lui donne le coup de grâce tout en essayant de le relancer en dépit de ses contradictions internes et de ses tensions. Mais, dans tous les cas, le projet lui-même ne pouvait ni résister au développement des théories des ensembles et à toute la critique mathématico-ensembliste de l'espèce de NF[1] de Quine, ni faire face aux revirements inattendus de la logique mathématique, en l'occurrence l'impossibilité gödelienne de démontrer la non-contradiction de l'arithmétique par des procédés purement logiques. Là ce n'est pas le propos. Frege était conscient des difficultés que posent sa théorie logiciste et sa définition nominale du nombre. Dans un texte publié en 1961 intitulé : *Three Philosophers*, Anscombe et Geach citent Wittgenstein qui écrit : " La dernière fois que je vis Frege..., je lui ai dit: ne trouvez-vous aucune difficulté à votre théorie que les nombres soient des objets ? Et Frege répondit: "Parfois il me semble voir une difficulté, mais ensuite, je ne la vois plus." (p. 130)

[1] *New Foundations :* Il s'agit d'une théorie axiomatique découverte par Quine qui écrivit en 1937 un article intitulé "New Foundations for Mathematical Logic".

« Frege, écrit Claude Imbert dans son Introduction à la traduction des *Fondements des mathématiques* (Paris, Le Seuil, 1969, p. 40-41), fut le premier à montrer qu'une unité est un concept. Ce n'est ni la propriété d'un concept, ni celle d'un objet – ni l'un quelconque des objets que l'on compte. Dire d'un concept particulier s'il est ou non une unité, relève d'une classification métalinguistique. Un concept est une unité, au sens de Frege, s'il a le pouvoir de discriminer des individus. »

Ce que je vais essayer plutôt de faire ici c'est, en quelque sorte, guidé par la signification profonde de la citation de Jean Largeault, de présenter et discuter la conception (problématique il est vrai) de Frege au sujet de la nature des nombres comme objets logiques, exprimée dans son livre *Les Fondements de l'Arithmétique (Grundlagen,* 1884) : en me posant la double question suivante : Quelle était au juste la démarche de Frege dans les *Grundlagen* ? Et en quoi cette démarche exprime-t-elle une sorte d'idéal philosophico-mathématique proprement fregéen qui consiste à fonder l'objectivité de la science sur des bases strictement liées à l'activité de la raison et sur rien d'autre ?

Dans le contexte de la philosophie des mathématiques de Frege, le fait de considérer l'arithmétique comme une sous-classe de la logique lui permet de montrer, de façon consistante, comment notre raison se dévoile à elle-même comme la source non psychologique d'une activité aboutissant à une connaissance objective et vraie de son objet. La définition du nombre comme objet logique – ou comme on peut dire aussi la définissabilité des nombres comme certaines classes de classes chez Frege – s'insère dans le mouvement intellectuel logiciste selon lequel la logique et l'arithmétique sont l'objectivation de notre activité rationnelle en rendant possible un type de connaissance qui sort de la sphère de l'ego et du sujet.

Frege fut le premier à avoir proposé dès 1884 une définition logique du concept de nombre. Comme l'a bien écrit Denis Vernant, « il s'agit, non plus de « spécifier » le concept de nombre comme le fit Cantor ou, à l'instar de Peano, de le « définir par abstraction », mais d'en fournir une « véritable définition » qui fournisse explicitement les moyens de le réduire à des idées logiques antérieurement admises et ainsi de l'éliminer effectivement de l'axiomatique unique qui fonde le discours logico-mathématique. L'exigence logiciste ne saurait être remplie que par des définitions nominales qui seules assurent l'unicité et la réduction logique des concepts mathématiques. »[2]

En effet, Frege dépasse les résultats de Peano et finit par donner dans les *Grundlagen* (Chapitre 4, 55-86) la première définition nominale du nombre cardinal. Cette définition, comme je viens de le dire, s'articule au sein de tout un programme amorcé dans l'*Idéographie (Begriffsschrift)* où il est question du premier texte logique de Frege paru en 1879, et réalisé, avec toutes les difficultés qu'on connaît, dans *Les Lois fondamentales de l'Arithmétique* en deux volumes *(Grundgesetze der Arithmetik)* entre 1893 et 1903 : tout le sens du programme consiste à fonder l'arithmétique sur des bases purement logiques, ce qui veut dire que tout l'effort de Frege porte sur une

[2] Denis Vernant (1993) p. 126-127.

interprétation des lois de l'Arithmétique dans des termes purement logiques. Bien que les trois textes de Frege soient liés, je vais me concentrer plutôt sur la démarche de Frege dans le texte de 1884 tout en insistant sur la portée philosophico-mathématique de la discussion autour de la définition du nombre cardinal.

1. Le programme logiciste

Belna (1996, p. 236) écrit : « Le but de Frege est de définir les nombres eux-mêmes et non quelque ensemble dont les éléments en auraient toutes les propriétés. En cela, il se distingue de Dedekind qui définit N comme ensemble simplement infini. Pour le dire en langage moderne, Frege veut fonder l'arithmétique et non en donner un modèle. »

En effet, Frege cherche à donner une définition générale et nominale du nombre. Répondre à la question « Qu'est-ce qu'un nombre ? » ne consiste pas à modéliser l'arithmétique mais bel et bien à la fonder une fois pour toute sur des bases solides. Pour Frege, ces bases ne peuvent être trouvées que dans l'activité objective et objectivisante de la raison (à condition évidemment de comprendre la raison dans un sens non psychologique, c'est-à-dire dans un sens proche de ce que nous trouvons dans la phénoménologie transcendantale : le but de Husserl était également de fonder la science). Ainsi, le nombre n'est pour lui (et ne devrait être) ni une propriété des objets physiques ni un élément subjectif: « donner un nombre, dit-il, c'est énoncer quelque chose d'un concept » (§46). Nous allons voir comment Frege va reformuler cet énoncé dans le paragraphe 55 de manière à ce que son analyse soit adéquate avec son intention de démontrer que les entités arithmétiques ne sont en vérité que des entités logiques (« entité » ici est, bien sûr, synonyme d'objet). La solution consiste à dire que le nombre est la propriété, non d'une chose, mais d'un concept, c'est-à-dire une classe d'équivalence de concepts équinumériques. Nous allons un peu plus loin voir de façon plus détaillée cette solution. (Le nombre 4, par exemple, dans l'énoncé appliqué : le carrosse de l'empereur est tiré par quatre chevaux, est l'extension (la classe d'équivalence) du concept « équinumérique » au concept « cheval tirant le carrosse de l'empereur ». En termes ensemblistes (cantoriens), on pourrait dire encore que le nombre 4 est l'ensemble des ensembles équipotents à un ensemble à 4 éléments.)

Par le biais de quelle démarche Frege arrive-t-il à cette solution ? En quoi cette solution est-elle intrinsèquement guidée par le dessein philosophique de la réduction « logiciste » en tant qu'objectivation fidèle de l'activité de la raison, par-delà toute conception subjectiviste et psychologiste, tout en dépassant les insuffisances, les incohérences de la théorie « naïve» de l'abstraction (Peano), de la théorie empiriciste (Mill) et de la théorie synthétique *a priori* (Kant) ?

Pour donner une définition purement logique du nombre cardinal, Frege va donc démontrer que les lois de l'Arithmétique sont analytiques et dérivent entièrement de la logique. Une fois ce résultat obtenu, il pourrait tout naturellement présenter sa théorie selon laquelle le nombre (cardinal) est un objet logique.

Je vais aborder cet exposé en posant trois questions. La réponse de Frege aux deux premières est négative. Sa réponse à la troisième est positive. La partie négative de la pensée de Frege est une composante essentielle du programme logiciste ; elle rentre aussi dans le style d'écriture de Frege. Il travaille souvent avec des négations et des questions. Ce trait de style l'a rendu sans doute l'un des premiers fondateurs d'une branche très fertile de la philosophie que nous appelons aujourd'hui la philosophie des mathématiques. Ce trait de style nous montre à quel point aussi certaines solutions suggérées par Frege lui-même redeviennent de nouvelles questions à résoudre. C'est le cas sans nul doute avec le texte de 1884 (*Grundlagen*) où la réponse à la question portant sur la nature logique des nombres naturels redevient une nouvelle question à résoudre : En quoi la notion d'extension de concepts est-elle une notion logique ou créatrice d'objets logiques ?

En tout cas, le mérite de l'approche logiciste c'est d'être à l'antipode à la fois du psychologisme, de l'empirisme et du formalisme. La clé de voûte de toute cette approche c'est, en un mot, l'objectivité. Les énoncés arithmétiques et logiques deviennent sous cette angle de vue l'objectivation même de l'activité de la raison comprise en tant que légalisation et détermination de cette activité créatrice de vérités objectives et publiques. La tâche de la logique et des mathématiques ne consiste pas à investir les âmes et explorer les consciences des êtres humains. Leur tâche réelle et authentique est d'investir la raison, « la raison » précise Frege, et non pas les esprits et les consciences individuelles des gens. La notion de pensée objective se présente en vérité comme une métaphore. Ce qui est désigné comme « objectif » est constitutif de la raison, son bien le plus caractéristique, et non pas quelque chose qui lui est étrangère et extérieure. Les « pensées » ne sont pas contenues dans la raison comme le serait un objet physique dans une main, mais plutôt à l'instar des muscles et des os qui sont dans la main.

Dans son compte rendu du livre de Husserl, *Philosophie de l'Arithmétique*, publié dans son livre (1971, p.144), Frege appelle naïve toute définition du nombre « pour laquelle le nombre n'est pas un énoncé portant sur un concept ou une extension de concept, alors que toute réflexion sur le nombre aboutit d'emblée et nécessairement à cette conclusion. » En effet, il range sous cette dénomination de conception naïve toutes les définitions du nombre qui précédent la sienne.

1.1. Les lois arithmétiques reposent-elles sur des faits physiques ?

La théorie qui fonde les lois arithmétiques sur les faits physiques et sur les traits et propriétés physiques des choses et des objets n'est autre que l'empirisme. Pour Frege, Mill est le représentant privilégié de cette tendance en philosophie. Mill définit le nombre par des faits physiques (§7), et tombe dans des confusions graves entre arithmétique appliquée et arithmétique pure, lois de l'addition et lois de la nature (§9). Traitant le nombre comme la propriété d'un agrégat (§ 23), Mill pose le nombre comme un être physique (§ 25).

Frege critique chez Mill ce que Jean-Philippe Narboux (2001, p 571) désigne comme le recours empiriste naïf à la notion d'aspect pour définir le nombre, prise en un sens perceptif. C'est dans ces termes que Frege parle de la conception empiriste de Mill, § 23 :

« De toute la richesse des faits physiques qui se dévoile à nous, Mill n'en cite qu'un, celui qui serait affirmé dans la définition du nombre 3. D'après Mill, il consiste en ce que des groupements d'objets faisant cette impression **. . .** sur la sensibilité, peuvent être séparés en deux parties comme:**?** Quel bonheur que tout au monde ne soit pas cousu ou noué ; car on ne pourrait pas opérer cette séparation, et 2 + 1 ne ferait pas 3 ! Et quel dommage que Mill n'ait pas décrit les faits physiques sur lesquels reposent 0 et 1 ! À la question : de quoi le nombre est-il la qualité ? Telle est la réponse de Mill : « Un nom de nombre désigne une propriété qui appartient à l'agrégat des choses que nous dénommons par ce nom ; cette propriété, c'est la manière caractéristique dont l'agrégat est composé ou peut être partagé. » L'article défini, dans l'expression « la manière caractéristique », est une faute. On peut partager un agrégat de manières bien différentes, et l'on ne peut pas dire que l'une seulement d'entre elles soit caractéristique. »

1.2. Les lois de l'Arithmétique sont-elles synthétiques a priori au sens de Kant ?

Frege distingue de façon nette entre arithmétique et géométrie. En arithmétique, l'intuition au sens kantien ne joue aucun rôle. À cette occasion Frege procède à une redéfinition de l'analyticité en mathématiques. À l'instar de Bolzano, il rejette la conception kantienne de l'analyticité comme étant très vague, et comme lui aussi, il observe une connexion entre la notion d'analyticité et les énoncés de la logique. Avec Frege, nous assistons à la naissance de la logique quantificationnelle moderne qui refond le schéma aristotélicien de « sujet, copule, prédicat » dans le modèle fonction-argument. Frege utilise ces idées logiques nouvelles pour traiter le problème des fondements des mathématiques. Il vise à contrer la thèse kantienne selon laquelle les fondements des mathématiques reposent sur l'intuition du temps. Frege objecte à Kant le fait qu'on a besoin d'un nombre infini de telles intuitions pour comprendre la série infinie des nombres. Pour lui, les propositions de l'arithmétique ne sont pas synthétiques a priori mais sont plutôt de nature analytique. L'analyticité pour lui est comprise dans un sens différent de celui que nous trouvons chez Kant. Dans le champ des mathématiques, Frege tient pour analytiques les vérités qui ont une preuve se fondant uniquement sur les lois logiques générales et sur les définitions. Le synthétique a priori ainsi que les intuitions a priori du temps qui lui correspondent, ne sont pas nécessaires. Tout le défi consiste donc à prouver comment les lois de l'arithmétique dérivent de sa logique, de son analyse des énoncés où figurent des termes de nombre et de sa définition des nombres. Relever ce défi constitue en vérité la raison d'être et le sort de tout le projet logiciste.

1.3. Les lois de l'Arithmétique sont-elles de nature purement logique ?

La logique est antérieure à l'Arithmétique et s'enracine en quelque sorte sur son sol (ce qui n'est pas l'avis de Hilbert). Frege (1885-1886) : « Aucune frontière précise ne peut être tracée entre la logique et l'arithmétique ».

Belna (1996) écrit : « (dans le logicisme) il s'agit, grâce à l'outil logique que constitue l'idéographie, d'éliminer l'intuition dans la conduite des preuves. » (p. 203)

Comment peut-on saisir les nombres comme des objets logiques ? Par le biais de quelle démarche Frege arrive-t-il à considérer les nombres comme des objets logiques ?

Dans la partie dite négative de son programme, Frege s'oppose aux conceptions empiriques, synthétiques a priori, psychologistes et formalistes et pense que leur erreur commune consiste précisément dans le fait de séparer les termes de nombre de leur usage dans des contextes propositionnels. Frege va donc utiliser le principe de contextualité pour analyser logiquement et grammaticalement la proposition du paragraphe 46 que le paragraphe 55 reprend dans ces termes : « un nombre appartient à un concept. ». Ne faisant l'objet d'aucune expérience sensible (les nombres ne sont pas réductibles aux sensations ou à nos impressions sensorielles), et d'aucune intuition (pour Kant il est absurde de parler d'objets logiques), la seule voix possible afin de dévoiler la nature logique des nombres naturels consiste dans le recours à ce principe. Le principe du contexte veut dire que le sens des termes faisant référence aux nombres doit être complètement déterminé à l'aide des contextes propositionnels dans lesquels ils sont utilisés. Selon lui, une définition du type formulé dans le §55 présente des difficultés qu'il faudra résoudre, dont le problème urgent de la mise au point d'un critère clair pour l'identité des nombres. Pour parvenir à une définition correcte des nombres naturels, il faut considérer à la fois le cas des énoncés arithmétiques purs et celui des énoncés arithmétiques appliqués. Le point de départ de Frege consiste à saisir l'opération de compter, d'où le recours à la notion de concept en tant que notion purement logique par opposition à des notions de nature empirique telle qu'une collection, ou un agrégat. La définition : « le nombre n'appartient au concept F que si seulement si … » a besoin d'être clarifiée sémantiquement, et ne nous indique aucun critère, ni pour reconnaître un nombre ni pour reconnaître l'identité de deux nombres. Pour Frege, le problème qui relève du critère d'identité, étant donné que cette notion est purement logique et constitue la base même de l'arithmétique, doit être résolu en priorité. En effet, dans le paragraphe 57, Frege se donne une telle tâche, à savoir poser une relation d'équivalence bien spécifique entre l'attribution d'un nombre et l'identité entre les nombres. C'est la structure profonde de la phrase qui pose le nombre comme appartenant à un concept. Cette relation d'identité est expliquée dans le paragraphe 65 par un jugement baptisé un jugement de recognition. Selon ce principe dit de recognition (selon lequel le nombre est un objet, et la définition une identité entre noms de même référence et de sens différents, il s'agit alors d'énoncer une proposition qui a un sens pour tout objet.), Frege obtient la proposition suivante énoncée dans le paragraphe 62 et qui dit : « Le nombre qui appartient au concept F est le même que celui qui appartient au concept G. »

Il est clair que Frege reprend à son propre compte la notion de correspondance univoque que nous trouvons déjà chez quelques-uns de ses prédécesseurs tels que Schröder (qui a écrit un papier à ce sujet en 1873), mais Frege la transforme en interprétant l'identité dans ce cas non pas arithmétiquement mais logiquement. Frege cherche à ouvrir la relation d'identité sur tous les objets pour lui donner une signification logique universelle : c'est ainsi qu'il transforme la relation d'équivalence et la réduit par définissabilité à la notion d'extension de concept. Pour montrer ce résultat, Frege illustre sa démarche à l'aide de l'exemple du parallélisme des droites. Frege généralise le résultat obtenu avec l'exemple du parallélisme des droites sur les nombres, et obtient une définition non pas par abstraction, mais par de pures notions logiques telles que l'identité, l'extension de concept, et l'équinuméricité comprise dans les termes de la relation logique d'équivalence. Il est clair que toute l'argumentation de Frege a pour objectif principal de donner une validité rationnelle et universelle à la notion logique d'extension de concept, et par là à l'objectité logique des nombres cardinaux. Cette notion reste néanmoins confuse chez lui. Il faut attendre très probablement le tome II des *Grundgesetze* pour voir Frege introduire et utiliser la notion de classe à laquelle il va réduire la notion d'extension de concepts. Dans les *Grundlagen*, la notion de classe n'est pas encore considérée comme une notion logique. Ce n'est que plus tard que Frege va distinguer entre classe et ensemble, et développer une théorie des classes tout en la considérant comme partie de la logique. Dans le § 105, Frege écrit : « L'arithmétique traite d'objets dont nous ne prenons pas connaissance….par la médiation des sens ; ces objets sont donnés immédiatement par la raison, et elle peut les pénétrer totalement, comme ce qui lui est propre ; et cependant ou plutôt précisément pour cela, ces objets ne sont pas des élucubrations subjectives. Rien n'est plus objectif que les lois de l'arithmétique. »

2. La définition fregéenne du nombre comme recherche d'un concept général du nombre cardinal

Essayer de donner une définition générale du nombre cardinal, c'est remonter aux principes de l'arithmétique mais c'est aussi redéployer l'histoire des mathématiques avec la définition donnée par Euclide dans les *Eléments*, Livre 7. Beaucoup de ceux qui ont essayé de donner une telle définition ont considéré le concept de nombre comme premier et simple, et par là indéfinissable. C'est cette constatation qui constitue le point de départ de Frege. Toutes les tentatives de définir le nombre qui ont précédé sont, à ses yeux, insuffisantes à rendre compte conceptuellement du problème de l'unité : elles échouent à donner une définition générale du concept de nombre qui allie identité et indiscernabilité, unicité et diversité. Comment dire que le nombre est à la fois lui-même et autre ? Depuis les Grecs, cette définition a mis les mathématiciens dans une contradiction : Le mot grec *monas* (Frege propose le mot unité pour traduire ce terme grec et insiste sur son ambiguïté) désigne à la fois l'objet que nous comptons et la propriété de cet objet. C'est la source de confusion et d'échec pour toutes les définitions précédentes. Toute la difficulté est donc de réunir en une même théorie ou définition identité et discernabilité ou diversité au sujet des unités. Les Grecs se sont heurtés à cette difficulté (et même ils l'ont gonflée métaphysiquement avec Platon). Nombreux sont ceux qui ont connu la même difficulté : rendre compte à la fois de l'identité et de la diversité des nombres. (Schröder, Hume, Thomas, Hesse, etc.) : il s'agit pour eux de définir le nombre par simple « adjonction d'unités ».

Frege s'explique dans le § 39 comme suit :

> « Si nous voulons engendrer le nombre par la réunion d'objets différents, nous obtenons un amoncellement d'objets ayant conservé exactement toutes les propriétés par lesquelles ils se distinguent les uns des autres, et ce n'est pas cela le nombre. Si d'autre part nous voulons construire le nombre par la réunion de l'identique, les identiques viennent immanquablement se fondre ensemble, et nous ne parvenons plus à la pluralité »

Frege donne un premier élément de réponse dans la distinction sémantique, première dans l'histoire de l'arithmétique, entre l'un et l'unité, pour finir par poser l'unité elle-même comme un concept. L'intrusion du « logique » dans le domaine spécifique de l'arithmétique est précisément et premièrement là : car la différence entre « un » et « unité » n'est, nous le voyons très bien, que d'ordre logique et grammatical. L'analyse logico-grammaticale du mot 1, établit une distinction entre le chiffre 1, désigné par un nom propre et donc un objet, et l'unité qui est, en vérité, un concept admettant le pluriel (ce que Quine appelle les termes qui divisent leur référence). Le nombre pour Frege, s'avère être donc non pas la propriété d'une chose, mais la propriété d'un concept. C'est ce que dit Frege dans le Paragraphe 46 : « Attribuer un nombre, c'est dire quelque chose d'un concept. ». Comme le dit très bien Jean-Philippe Narboux (2001, p. 573) : « La difficulté que Frege s'emploie à résoudre consiste à concilier égalité et discernabilité dans l'attribution du nombre et non dans son engendrement. Pour Frege, la contradiction entre égalité et discernabilité est une contradiction verbale issue d'un concept incohérent dont il s'agit de lever l'équivoque constitutive. …C'est en montrant qu'il n'y a nullement lieu de les concilier que Frege montre qu'égalité et discernabilité ne sont nullement incompatibles. Car il ne faut pas dire que les unités sont en un sens égales, en un autre discernables, mais que le mot « unité » est employé en deux sens différents. »

Dans le § 45, Frege précise :

> « Le nombre n'est pas abstrait des choses… ; il n'est pas une propriété des choses…La question dès lors demeure : quand on donne un nombre, sur quoi porte notre énoncé ? Le nombre n'est pas un être physique ; mais il n'est pas non plus subjectif, il n'est pas une représentation. Le nombre ne naît pas de l'addition d'une chose à une autre, et l'attribution d'un nom nouveau après chacune de ces adjonctions ne fait rien à l'affaire. Les expressions « multiplicité », « ensemble », « pluralité » sont, par leur indétermination, inaptes à apporter quelque lumière sur le nombre. »

Ainsi, grâce à ce que Frege appelle concept et à sa distinction avec ce qu'il appelle objet ou son extension, Frege se soustrait à l'ambiguïté en question : les objets sont discernables mais sont identiques une fois subsumés sous un même concept. Prenons deux exemples : les énoncés d'arithmétique appliquée suivants : « Vénus a 0 lune », et « le carrosse de l'empereur est tiré par quatre chevaux ». Dans le premier cas, nous attribuons au concept « lune de Vénus » la propriété de subsumer 0 objet, et dans le deuxième cas, nous attribuons au concept « le carrosse de l'empereur est tiré par quatre chevaux », 4 objets.

Or, c'est bel et bien cette distinction qui va représenter à la fois la force de la solution fregéenne et sa difficulté. Le nombre va être posé comme un objet de second ordre, en l'occurrence comme un objet logique : une sorte de concept de concept si on veut éviter de parler de propriété de propriété, langage difficile à concilier avec l'esprit de Frege. Selon une jolie phrase de Belna (Belna, 1996, p. 232), qui reprend sans doute ce que Badiou (1990) avait écrit poétiquement à ce sujet lorsqu'il qualifie le Nombre comme « forme insondable de l'Être » (p. 69) et comme « coextensif à l'être » (p. 175), « il y a quelque analogie entre le nombre et l'existence. D'une part, parce que l'existence se dit aussi d'un concept, d'autre part, parce que « affirmer l'existence, ce n'est rien d'autre que nier le nombre zéro. »

3. Difficultés de la définition et limites du logicisme

Belna (1996, p. 236) : « Le but de Frege est de définir les nombres eux-mêmes et non quelque ensemble dont les éléments en auraient toutes les propriétés. En cela, il se distingue de Dedekind qui définit N comme ensemble simplement infini. Pour le dire en langage moderne, Frege veut fonder l'arithmétique et non en donner un modèle. »

Comme l'écrit de façon claire Hans D. Sluga dans son *G. Frege, The Arguments of the philosophers* (Routledge,1980, pp. 127-128), il y a quelque de chose de surprenant et d'intriguant dans la définition des nombres en termes d'extensions de concepts. Pour Sluga, Frege est parvenu à définir les nombres comme des objets, mais la question de savoir en quel sens cette définition rend ces objets des objets logiques demeure non résolue. « La notion d'extension de concept surgit de nulle part à la page 79 dans le texte de 1884. Comment peut-elle être comprise ? S'agit-il d'une notion logique et pourquoi ? Frege assume que cette notion est connue et suggère qu'elle pourrait en fin de compte n'être pas essentielle…Dans tous les cas, la question sera résolue dans le texte de 1891, intitulé *Fonction et concept*…où les extensions de concepts sont posées comme des parcours de valeurs pour des fonctions, et où Frege donne des arguments judicieux pour considérer ces parcours de valeurs comme des objets logiques. Le texte de 1884 exprime le désir de Frege d'accomplir ce qu'il avait annoncé dans l'*Idéographie*. Le livre finit sur un dilemme car il pose le problème sans pouvoir le résoudre complètement, c'est-à-dire sans montrer comment les nombres sont des objets logiques. De l'aveu même de Sluga aussi bien que d'autres commentateurs de Frege, le recours à la notion d'extension de concept pour donner une définition des nombres est bien problématique et met le logicisme dans des difficultés sérieuses. La notion d'extension de concept est ambiguë : on ne sait pas si elle s'applique à des objets ou à des concepts. À quel point peut-on retenir la distinction fondamentale chère à Frege entre concept et objet, si on va traiter les nombres comme des concepts tombant sous le concept équinumérique au concept F par exemple ? À ce niveau supérieur de l'analyse de l'identité numérique des nombres chez Frege, la notion d'extension de concept qui permet, selon lui, de définir logiquement les lois de l'arithmétique et de poser les nombres comme des objets purement logiques, se montre difficile à distinguer de la notion de concept elle-même. Comment l'acte de fixer le sens de l'identité numérique peut-il nous donner le concept de nombre sans pour autant dire que le concept et l'extension de concepts sont la même chose ? La réponse que donnera Frege à cette question cruciale, dont il prendra conscience dans le compte rendu sur le livre de Husserl dès 1894, va rendre plus proche sa construction de la théorie russellienne des classes, mais aussi de la théorie cantorienne des ensembles, si l'on croit Desanti qui traite dans son texte de 1975 (*La philosophie silencieuse*, p.180) les concepts fregéens et les ensembles cantoriens comme des frères jumeaux.

4. La signification philosophique du programme logiciste et son intérêt par rapport à l'idéal d'objectivité en science et au problème central de l'applicabilité en philosophie des mathématiques

« Une recherche fondamentale sur le concept de nombre, écrit Frege dans l'introduction de (1884), ne peut manquer d'être marquée de philosophie. La tâche est commune aux mathématiques et à la philosophie. »

Faut-il distinguer, comme le préconise Largeault lui-même, entre la construction logique et la doctrine philosophique dans le cas de Frege ? Bien que nous puissions assister aujourd'hui avec Boolos (1998), par exemple, à une sorte de renaissance du style de Frege dans le domaine de la construction de systèmes logiques qui seraient consistants avec la logique de second-ordre, l'avènement de la construction logique fregéenne des nombres naturels a été guidé par les deux principes de rationalité et d'objectivité. Ces deux principes sont intimement liés dans la pensée de Frege. La définition des nombres naturels trouve son paradigme dans l'unité de ces deux principes, c'est-à-dire dans les extensions de concepts. Par objectivité, Frege entend avant tout indépendance par rapport aux sensations, aux intuitions et aux représentations, c'est-à-dire indépendance par rapport à toute image subjective interne. Or, cette indépendance ne suffit pas, elle doit se fonder sur un sol sûr : ce sol Frege le trouve dans la raison et nulle part ailleurs. L'objectif se distingue nettement chez Frege par deux traits essentiels : indépendance totale d'un côté et rationalité créatrice de concepts de l'autre. « Du point de vue de Frege, écrit Belna (2006, p. 341), il est essentiel que les objets et concepts de la logique et des mathématiques ne soient ni des créations mentales, ni des faits empiriques : ils sont hors de nous et saisis par la raison.».

Les énoncés de la logique et de l'arithmétique sont objectifs dans le sens où ils sont indépendants de l'activité de la pensée, tout en étant l'objectivation la plus fidèle de l'activité de la raison car les objets qui portent sur eux sont des « pensées » qui se tiennent, insiste Frege « de la même manière devant chacun. »

C'est contre ces mêmes « pensées », indépendantes et non localisables dans l'espace et dans le temps, que va se révolter, quelques décennies plus tard, Paul Benacerraf dans son fameux article de 1965 : « Ce que les nombres ne pouvaient pas être » « What Numbers could not be », et surtout dans son fameux dilemme de 1974. Quelle que soit l'issue de cette polémique entre réalisme fregéen et nominalisme modal moderne, Frege a pointé vers un paradigme d'objectivité qui ne coupe pas, comme le fait le formalisme de Hilbert, les énoncés logiques et mathématiques totalement du monde, mais s'allie avec une philosophie qui a les outils nécessaires pour rendre compte de la question épineuse devant tout anti-platonisme possible, je veux dire de la question de l'applicabilité des théories mathématiques aux phénomènes du monde physique, car si l'on croit Hartry Field (1989), cette question est à prendre au sérieux d'autant plus que le platonisme la résout de façon assez consistante.

Bibliographie

Badiou, Alain (1990) : Le Nombre et les nombres, Le seuil.
Belna, Jean-Pierre (1996) : La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege, Vrin.
______________(2006) : « Objectivité et principe de dualité : Le paragraphe 26 des fondements de l'arithmétique de Frege », Revue d'histoire des sciences, Tome 59-2 Juillet-décembre 2006, p 319-344.
Boolos, Georges (1998) avec J; Burgess et R.Jeffrey eds, *Logic, Logic, and Logic*, Harvard University Press, Cambridge, Ma. Boolos: *Saving Frege from Contradiction, The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic.*
Field, Hartry (1989): *Realism, Mathematics and Modality*, Basil Blackwell.
Frege, Gottlob (1984) : *Grundlagen der Arithmetik*, Traduction anglaise par: J. L. Austin : *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number*, Harper & Brothers, New York, 1960. (Première édition 1950, Basil Blackwell).
______(1895): « Le Nombre entier », Revue de métaphysique et de morale, Vol 3 pp. 73-78, 1895.
Maddy, Peneloppe (1990): *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford. Chapitre 3: Numbers, p. 83 où elle critique le concept fregéen de nombre comme étant un concept de second ordre avant de présenter sa propre théorie réaliste forte.

Narboux, Jean-Philippe (2001) : « Aspects de l'arithmétique », Archives de Philosophie 2001/3 Volume 64, p. 569-591.
Panza, Marco (1995) : « Platonsime et Intentionnalité » dans **Panza Marco & Jean-Michel Salanskis** (1995) : *L'objectivité mathématiques, Platonismes et structures formelles,* Masson, Paris, 1995.
Sluga, Hans D. (1980): Gottlob Frege, *The Arguments of the Philosophers*, Routledge. Chapitre: In search of logical objects. 6- Frege's concept of an object. 7- The logical analysis of natural numbers.
Tiles, Mary (1989): *The Philosophy of Set theory, An historical Introduction to Cantor's Paradise*, Dover Publications, Mineola, New York.
Vernant, Denis (1993): *La philosophie mathématique de Russell*, Vrin.